误差

Q1.1 序列$\{y_n\}$满足递推关系

$$y_{n+1} = 100.01 y_n - y_{n-1}$$

取$y_0 = 1, y_1 = 0.01$及$\hat{y_0} = 1 + 10^{-6}, \hat{y_1} = 0.01$,试计算$y_5, \hat{y_5}$,从而说明递推公式对于计算是不稳定的

```python
def lab1(init1, init2, iter=5):
    for i in range(iter):
        init3 = 100.01*init2 - init1
        print("n=",i+1)
        print("n+1 n n-1")
        print(init3, init2, init1)
        init2, init1 = init3, init2

lab1(1, 0.01, iter=5)
lab1(1+1e-6, 0.01, iter=5)
```

运行程序,得到

$$\begin{aligned} y_5 &= 8.899450853031155 \times 10^{-11} \\ \hat{y_5} &= -1.0001000098297383 \end{aligned}$$

Q1.6 怎样计算下列各式才可减小误差?

I

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x}$$

Motivation: 避免相近二数相减

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+x} - \sqrt{x} \\ =&\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \\ =&\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} \end{aligned}$$

II

$$\ln x_1 - \ln x_2 \quad (x_1 \approx x_2)$$

Motivation: 避免相近二数相减

$$\begin{aligned} &\ln x_1 - \ln x_2 \\ =&\ln \frac{x_1}{x_2} \end{aligned}$$

III

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} \quad (x\text{在}0\text{附近})$$

Motivation: 避免小分母

$$\begin{aligned} &\frac{1-\cos x}{\sin x} \\ =&\frac{\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} (\text{万能公式}) \\ =&\tan\frac{x}{2} \end{aligned}$$

IV

$$\sin(x+\epsilon)-\sin x$$

Motivation: 避免相近二数相减

$$\begin{aligned}&\sin(x+\epsilon)-\sin x\\=&2\cos\frac{2x+\epsilon}{2}\sin\frac{\epsilon}{2}(\text{和差化积})\end{aligned}$$

V

$$\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

显然该积分有closed-form

$$\arctan(N+1)-\arctan N$$

Motivation: 避免相近二数相减

$$\begin{aligned}&\arctan(N+1)-\arctan N\\=&\arctan\frac{1}{1+(N+1)N}\end{aligned}$$

这里使用一个了关于$\arctan$的基本公式:

$$\arctan A+\arctan B=\arctan\frac{A+B}{1-AB}$$

proof: 令$x=\arctan A,y=\arctan B$

$$\begin{aligned}\tan(x+y)&=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}\\&=\frac{A+B}{1-AB}\end{aligned}$$

两边取$\arctan$,即得$\arctan A+\arctan B=\arctan\frac{A+B}{1-AB}$,Q.E.D

因此不难得出

$$\arctan A-\arctan B=\arctan\frac{A-B}{1+AB}$$

Q1.7 求方程$x^2-56x+1=0$的两个根,要使他们具有四位有效数字,$\Delta=\sqrt{b^2-4ac}$至少要取几位有效数字?如果利用韦达定理,Δ又要取多少位有效数字?

预备知识

有效数字:如果近似值x^*的绝对误差限不超过某一位的半个单位,从该位向左数到x^*的第一个非零的数字,共有n位,则称n位有效数字

定理1

若x^*具有n位有效数字,则其相对误差限为

$$\epsilon_r^*(x)=\frac{1}{2\alpha_1}\times10^{-(n-1)}$$

其中α_1是x^*的第一个有效数字

定理2

若x^*的相对误差限满足

$$\epsilon_r^*(x)\le\frac{1}{2(\alpha_1+1)}\times10^{-(n-1)}$$

则x^*具有n位有效数字

题解

这题与例1-5相似，按照例题可知有两种解法，既可以用相对误差求解也可以用绝对误差求解

下面用绝对误差求解：

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{56 \pm \sqrt{56^2-4}}{2} \\
&= \begin{cases} \frac{56+\sqrt{3132}}{2} \\ \frac{56-\sqrt{3132}}{2} \end{cases} \\
&\approx \begin{cases} 55.98 \\ 0.018 \end{cases}
\end{aligned}
$$

由有效数字的定义和四舍五入规则，若使$x_{1,2}$具有四位有效数字，根据x_1, x_2先导0的个数，有绝对误差

$$
\begin{aligned}
|e^*(x_1)| \le 0.5 \times 10^{-2} \\
|e^*(x_2)| \le 0.5 \times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

而$x_{1,2}$是关于Δ的函数，即$x_{1,2} = f(\Delta)$

$$
f(\Delta) = \frac{56 \pm \Delta}{2}
$$

根据微分中值定理，有

$$
e^*(f(x)) = |f'(\zeta)||e^*(x)| \approx |f'(x^*)||e^*(x)|
$$

代入$|f'(\Delta)| = \frac{1}{2}$，得（下面不确定要用等号还是约等号，为数学上严谨似乎应该用不等）

$$
\begin{aligned}
|e^*(\Delta)| = 2|e^*(x_1)| \le 10^{-2} \\
|e^*(\Delta)| = 2|e^*(x_2)| \le 10^{-5}
\end{aligned}
$$

需要同时满足，即

$$
|e^*(\Delta)| \le 10^{-5}
$$

由于$\Delta \approx 55.96$，故算上整数位需要有7位有效数字

若使用韦达定理，由于x_1要求低，令$x_2 = \frac{1}{x_1}$，则此时x_2关于Δ的函数为

$$
f(\Delta) = \frac{2}{56+\Delta}
$$

代入$|f'(\Delta)|_{\Delta \approx 55.96} = 0.00016$，得（这里是不是需要分析导函数的误差？）

$$
\begin{aligned}
|e^*(\Delta)| &= \frac{1}{0.00016}|e^*(x_2)| \\
&\le 0.03125 \\
&\le 0.5 \times 10^{-1}
\end{aligned}
$$

需要同时满足，即

$$
|e^*(\Delta)| \le 10^{-2}
$$

由

由于$\Delta \approx 55.96$，故算上整数位需要有4位有效数字

非线性方程求根-1

Q2.2.1 用二分法求方程$x^2 - x - 1 = 0$的正根，要求准确到小数点后第一位

设$f(x) = x^2 - x - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

若存在根则关于$\frac{1}{2}$对称，故先考虑右侧的情况

代入数值,得$f(\frac{1}{2})<0, f(1)=-1<0, f(2)=1>0$

由零点存在定理可知,存在正根$x\in(1,2)$使得$f(x)=0$,且由解关于$\frac{1}{2}$对称可知只存在一个正根

要求保留准确到小数点后一位,即

$$\epsilon^*(x)=0.5\times10^{-1}$$

区间(a,b)	中值x	f(x)	Δx
(1,2)	1.5	-0.25	
(1.5,2)	1.75	0.3125	0.25
(1.5,1.75)	1.625	0.015625	0.125
(1.5,1.625)	1.5625	-0.12109375	0.0625
(1.5625,1.625)	1.59375	-0.0537109375	0.03125

当迭代到第五次得时候,发现满足要求,停止迭代,解为$x=1.59375$

验算代码:

```
def fun(x):
    return x**2-x-1
def mid(a,b):
    return a/2+b/2

def lab2(a=1, b=2, thres=5e-2):
    fa = fun(a)
    fb = fun(b)
    x = mid(a,b)
    fx = fun(x)
    print('iter 1')
    print('fx:', fx)
    cnt = 1
    while(True):
        cnt += 1
        print('iter ', cnt)
        if fx*fa > 0:
            a = x
        else:
            b = x
        old_x = x

        fa = fun(a)
        fb = fun(b)
        x = mid(a,b)
        fx = fun(x)

        delta_x = abs(x-old_x)
        print('x: ', x)
        print('fx:', fx)
        print("delta: ", delta_x)
        if delta_x < thres:
            return

lab2()
```

Q2.3.1 为求方程$x^3-x^2-1=0$在$x_0=1.5$附件的一个根,现将方程改写成下列等价形式,并建立相应的迭代公式

- $x=1+\frac{1}{x^2}$,**迭代公式**$x_{K+1}=1+\frac{1}{x_K^2}$
- $x^3=1+x^2$,**迭代公式**$x_{K+1}=\sqrt[3]{1+x_K^2}$
- $x^2=\frac{1}{x-1}$,**迭代公式**$x_{K+1}=\frac{1}{\sqrt{x_K-1}}$

试分析每一种迭代公式的收敛性

$$x_{K+1}=1+\frac{1}{x_K^2}$$

记$\varphi(x)=1+\frac{1}{x^2}$,**有**$\varphi'(x)=-2x^{-3}$

$$\varphi'(x)|_{x=1.5}=-0.5925925925925926$$

由于

$$|\varphi'(x)|_{x=1.5}|<1$$

故该迭代公式局部收敛

$$x_{K+1}=\sqrt[3]{1+x_K^2}$$

记$\varphi(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{3}}$,**有**$\varphi'(x)=\frac{2x}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$

$$\varphi'(x)|_{x=1.5}=0.4557686259088263$$

由于

$$|\varphi'(x)|_{x=1.5}|<1$$

故该迭代公式局部收敛

$$x_{K+1}=\frac{1}{\sqrt{x_K-1}}$$

记$\varphi(x)=(x-1)^{-\frac{1}{2}}$,**有**$\varphi'(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$

$$\varphi'(x)|_{x=1.5}=-\sqrt{2}$$

由于

$$|\varphi'(x)|_{x=1.5}|>1$$

故该迭代公式不收敛

注:

- **包含剩余的所有作业**
- **已和参考答案校对,可放心批改**
- **存在部分题解与老师提供的电子版的参考答案不一致:**
  - **4-2-1**
  - **6-1-1**
  - **6-1-2**
  - **8-2-1**
  - **8-2-2**

  此外还有一些题解与参考答案存在出入

  - **8-1-1 怀疑是计算精度的问题**

非线性方程求根-2

2-4-1 用牛顿法计算$\sqrt{3}$,结果是具有四位有效数字的近似值

设$f(x)=x^2-3$ **有**$f'(x)=2x$

牛顿法迭代格式为

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
&= x_k - \frac{x_k^2-3}{2x_k} \\
&= \frac{x_k}{2} + \frac{3}{2x_k}
\end{aligned}
$$

由于$1^2<3<2^2$**,故**$\sqrt{3}$**在1和2之间,要求具有四位有效数字,即**

$$\epsilon^*(x)=0.5\times10^{-3}$$

迭代到第4次时发现符合要求,解为1.732

迭代k	x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$
0	1	
1	2	1
2	1.75	0.25
3	1.7321428571428572	0.017857142857142794
4	1.7320508100147274	$9.204712812982407\times10^{-5}$

2-4-4 对方程$f(x)=x^n-a$**和**$f(x)=1-\frac{a}{x^n}$**应用牛顿法,分别导出**$\sqrt[n]{a}$**的迭代公式,并求**

$$\lim_{K\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{K+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_K)^2}$$

设$f(x)=x^n-a$ **有**$f'(x)=nx^{n-1}$

牛顿法迭代格式为

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
&= x_k - \frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}} \\
&= \frac{(n-1)}{n}x_k + \frac{a}{nx_k^{n-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{K\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+x_{k-1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2} \\
&= \lim_{K\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+\frac{(n-1)}{n}x_k+\frac{a}{nx_k^{n-1}}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2} \\
&= \lim_{K\to\infty}\frac{\frac{(n-1)}{n}+\frac{a(1-n)}{n}x_k^{-n}}{2(\sqrt[n]{a}-x_k)} \\
&= \lim_{K\to\infty}\frac{a(n-1)x_k^{-n-1}}{-2} \\
&= \frac{a(n-1)a^{\frac{-n-1}{n}}}{-2} \\
&= \frac{1-n}{2\sqrt[n]{a}}
\end{aligned}
$$

设$f(x)=1-\frac{a}{x^n}$ 有$f'(x)=anx^{-n-1}$

牛顿法迭代格式为

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\\&=x_k-\frac{1-\frac{a}{x_k^n}}{anx^{-n-1}}\\&=\frac{(n+1)}{n}x_k+\frac{x_k^{n+1}}{an}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{K\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}\\&=\lim_{K\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+\frac{(n+1)}{n}x_k+\frac{x_k^{n+1}}{an}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}\\&=\lim_{K\to\infty}-\frac{\frac{(n+1)}{n}+\frac{(1+n)}{an}x_k^n}{2(\sqrt[n]{a}-x_k)}\\&=\lim_{K\to\infty}\frac{(n+1)x_k^{n-1}}{2a}\\&=\frac{(n+1)a^{\frac{n-1}{n}}}{2a}\\&=\frac{1+n}{2\sqrt[n]{a}}\end{aligned}$$

解线性方程组的直接法-1

3-1-2 用高斯-若尔当列主元消元法求下列方程的解

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\-2x_1-2x_2-x_3=-3\\2x_1-3x_2-2x_3=-1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}1&2&1&2\\-2&-2&-1&-3\\2&-3&-2&-1\end{pmatrix}\\
\overset{\boxed{\text{选主元}}}{\Rightarrow}&\begin{pmatrix}1&2&1&2\\-2&-2&-1&-3\\\boxed{2}&-3&-2&-1\end{pmatrix}\\
\overset{\text{交换}r_1r_3}{\Rightarrow}&\begin{pmatrix}\boxed{2}&-3&-2&-1\\-2&-2&-1&-3\\1&2&1&2\end{pmatrix}\\
\overset{\text{标准化}}{\Rightarrow}&\begin{pmatrix}\boxed{1}&-\frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&-5&-3&-4\\0&\frac{7}{2}&2&\frac{5}{2}\end{pmatrix}\\
\overset{\boxed{\text{选主元}}}{\Rightarrow}&\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&\boxed{\text{-5}}&-3&-4\\0&\frac{7}{2}&2&\frac{5}{2}\end{pmatrix}\\
\overset{\text{标准化}}{\Rightarrow}&\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&\boxed{1}&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&-\frac{1}{10}&-\frac{3}{10}\end{pmatrix}\\
\overset{\boxed{\text{选主元}},\text{标准化}}{\Rightarrow}&\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&\boxed{1}&3\end{pmatrix}\\
\overset{\text{消元}}{\Rightarrow}&\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

解线性方程组的直接法-2

3-2-2 用LU分解法解方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

设分解为单位下三角和上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ l_{i1} & \cdots & l_{i,i-1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & u_{jj} & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

使用道立特分解法

$$\begin{cases} 1 \cdot u_{1j} = a_{1j} \Rightarrow u_{1j} = a_{1,j} & j = 1 \to n \\ l_{i1} \cdot u_{11} = a_{i1} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} & i = 2 \to n \\ l_{21}u_{1j} + u_{2j} = a_{2j} \Rightarrow u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j} & j = 2 \to n \\ l_{i1}u_{12} + l_{i2}u_{22} = a_{i2} \Rightarrow l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}u_{12}}{u_{22}} & i = 3 \to n \\ \cdots & \\ u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kj} & j = r \to n \\ l_{ir} = \frac{a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}}{u_{rr}} & i = r+1 \to n \end{cases}$$

依次解得

$$\begin{cases} u_{11} = 2 \\ u_{12} = -1 \\ u_{13} = 1 \\ l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = -\frac{1}{2} \\ u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -2 - (-\frac{1}{2} \times -1) = -\frac{5}{2} \\ l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{1}{2} \\ u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 3 - (-\frac{1}{2} \times 1) = \frac{7}{2} \\ l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{3 - \frac{1}{2} \times (-1)}{-\frac{5}{2}} = -\frac{7}{5} \\ u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{3k}u_{k3} = 1 - \frac{1}{2} - (-\frac{7}{5} \times \frac{7}{2}) = \frac{27}{5} \end{cases}$$

由此可得,LU分解为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

先解$Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

解得y

$$\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = 5 + 2 = 7 \\ b_3 = 6 + \frac{7}{5} \times 7 - 2 = \frac{69}{50} \end{cases}$$

再解$Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{50} \end{pmatrix}$$

解得最终结果x

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(4 - \frac{23}{9} + \frac{7}{9}) = \frac{10}{9} \\ x_2 = -\frac{2}{5}(7 - \frac{7}{2} \times \frac{23}{9}) = \frac{7}{9} \\ x_3 = \frac{23}{9} \end{cases}$$

解线性方程组的迭代法-1

4-1-1 对下述矩阵计算L_∞, L_1, L_2**范数**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.5 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

计算特征值为

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 9 = 0$$
$$\lambda_{\max}(A^T A) = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \approx 5.3028$$
$$B^T B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 150 \\ 150 & 226 \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 100-\lambda & 150 \\ 150 & 226-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 326\lambda + 100 = 0$$
$$\lambda_{\max}(B^T B) = \frac{326 + 6\sqrt{2941}}{2} \approx 325.69296$$
$$C^T C = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.5 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.37 & -0.33 \\ -0.33 & 0.34 \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 0.37-\lambda & -0.33 \\ -0.33 & 0.34-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.71\lambda + 0.0169 = 0$$
$$\lambda_{\max}(C^T C) = \frac{0.71 + \frac{3}{100}\sqrt{485}}{2} \approx 0.68534$$

解得

$$\|A\|_\infty=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|=3$$

$$\|A\|_1=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|=3$$

$$\|A\|_2=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}\approx 2.3028$$

$$\|B\|_\infty=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|=25$$

$$\|B\|_1=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Bx\|_1}{\|x\|_1}=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|=15$$

$$\|B\|_2=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2}=\sqrt{\lambda_{\max}(B^TB)}=\sqrt{\frac{326+6\sqrt{2941}}{2}}=18.046965$$

$$\|C\|_\infty=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Cx\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|=1.1$$

$$\|C\|_1=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Cx\|_1}{\|x\|_1}=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|=0.8$$

$$\|C\|_2=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Cx\|_2}{\|x\|_2}=\sqrt{\lambda_{\max}(C^TC)}=\sqrt{\frac{0.71+\frac{3}{100}\sqrt{485}}{2}}=0.82785$$

4-2-1 设$A=\begin{pmatrix}100 & 99\\ 99 & 98\end{pmatrix}$,计算$A$的条件数$\mathrm{cond(A)}_\infty,\mathrm{cond(A)}_2$

计算A的逆为

$$A^{-1}=\frac{A^*}{||A||}=\frac{\begin{pmatrix}98 & -99\\ -99 & 100\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-98 & 99\\ 99 & -100\end{pmatrix}$$

计算A^TA的特征值为

$$A^TA=\begin{pmatrix}100 & 99\\ 99 & 98\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 99\\ 99 & 98\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19801 & 19602\\ 19602 & 19405\end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix}19801-\lambda & 19602\\ 19602 & 19405-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-39206\lambda+1$$
$$\lambda=19603\pm 2574\sqrt{58}$$

故解得

$$\mathrm{cond(A)}_\infty=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=199^2=39601$$
$$\mathrm{cond(A)}_2=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}=\sqrt{768555217+100916244\sqrt{58}}\approx 39206$$

注:老师提供的电子版教材参考答案对应的解疑似有误,我用`numpy.linalg.cond()`进行了验证,疑似课本提供的答案想用科学计数法表示但忘记写上了10次幂的部分

插值-1

6-1-1 当$x=-1$,1,2时$f(x)=-3,0,4$求$f(x)$的二次插值多项式

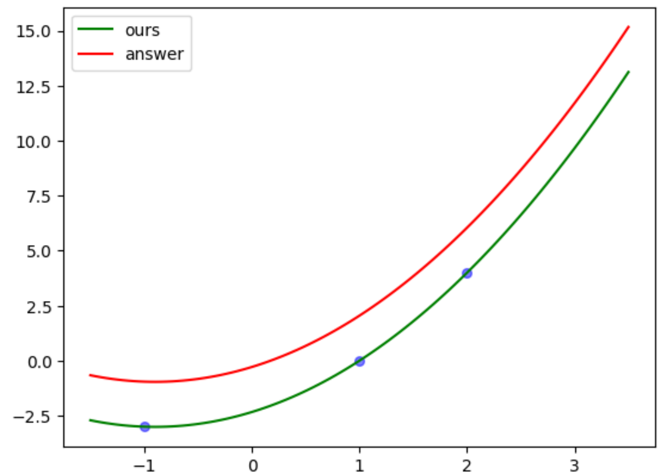
设$p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$,求解线性方程组

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

解得

$$
\begin{cases} a_0 = -\frac{7}{3} \\ a_1 = \frac{3}{2} \\ a_3 = \frac{5}{6} \end{cases}
$$

注:老师提供的电子版教材参考答案对应的a_0系数$-\frac{2}{7}$(红色)疑似有误,以下是拟合结果



6-1-2 $f(x)$的函数表如下

x	$\ln x$
0.4	**0.916291**
0.5	**-0.963147**
0.6	**-0.510826**
0.7	**-0.357765**
0.8	**-0.223144**

用线性插值及二次插值计算$\ln 0.54$并估计误差

$\ln 0.54$**计算值为**

$$
\ln 0.54 = -0.616186139423817
$$

线性插值:

$$
\begin{aligned}
\ln 0.54 &= \ln 0.5 + \frac{\ln 0.6 - \ln 0.5}{0.6 - 0.5}(0.54 - 0.5) \\
&= -0.693147 + \frac{-0.510826 + 0.693147}{0.6 - 0.5}(0.54 - 0.5) \\
&= -0.6202186
\end{aligned}
$$

由此可得绝对误差

$$
|e^*(x)| \leq 0.00404
$$

二次插值:

考虑$\ln x$的导函数为$\frac{1}{x}$,故选择$0.5, 0.6, 0.7$作为插值点

设$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$,求解

$$\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.25\\1 & 0.6 & 0.36\\1 & 0.7 & 0.49\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.693147\\-0.510826\\-0.357765\end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases}a_0=-2.043652\\a_1=3.43251\\a_3=-1.463\end{cases}$$

代入,得二次插值下$\ln 0.54=0.6167074$

由此可得绝对误差

$$|e^*(x)|\leq 0.00053$$

注:老师提供的电子版教材参考答案对应的二次插值的残差估计疑似有误,取后面的点显然精度更高,这里为验证进行一次计算

$$\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.16\\1 & 0.5 & 0.25\\1 & 0.6 & 0.36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.916291\\-0.693147\\-0.510826\end{pmatrix}$$

解得

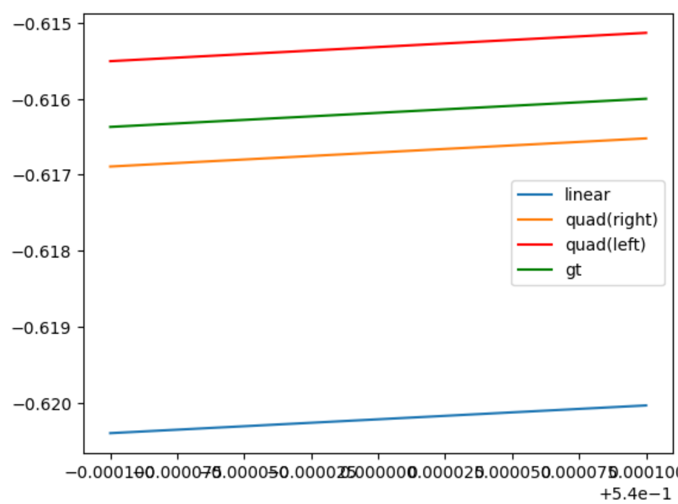
$$\begin{cases}a_0=-2.217097\\a_1=4.068475\\a_3=-2.04115\end{cases}$$

代入,得二次插值下$\ln 0.54=0.61531984$**,这与标准答案保持一致**

由此可得绝对误差

$$|e^*(x)|\leq 0.0008663$$

标准答案的残差计算疑似有误,以下是拟合结果$x\in(0.5399,0.5401)$**,从这里也可以发现显然取后面(right)的点更逼近真实值**



插值-2

6-4-3 已知$y_j'=x_j$**求二次样条函数,满足插值条件**

$$S(x_0)=1,S'(x_i)=y_i'\ (i=0,1,\cdots,n)$$
$$S(x_n)=1,S'(x_i)=y_i'\ (i=0,1,\cdots,n)$$

设$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$**,则满足条件**

$$S'(x)=a_1+2a_2x=x$$

由此可得$(1-2a_2)x=a_1$恒成立,当且仅当

$$\begin{cases} a_2=\frac{1}{2} \\ a_1=0 \end{cases}$$

即

$$S(x)=a_0+\frac{1}{2}x^2$$

代入边界条件,分别得

$$S(x)=1-\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{2}x^2$$
$$S(x)=1-\frac{1}{2}x_n^2+\frac{1}{2}x^2$$

曲线拟合与函数逼近-1

7-1-3 在某科研中,测得

t	w
1	4.22
2	4.02
4	3.85
8	3.59
16	3.44
32	3.02
64	2.59

已知t与w之间有经验公式$w=ct^\lambda$,试用最小二乘法确定c,λ

将经验公式转换为线性关系

$$w=ct^\lambda$$
$$\lambda\ln t+\ln c=\ln w$$

由此可得

$$\lambda\begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.6931471805599453 \\ 1.3862943611198906 \\ 2.0794415416798357 \\ 2.772588722239781 \\ 3.4657359027997265 \\ 4.1588830833596715 \end{pmatrix}+\ln c=\begin{pmatrix} 1.4398351280479205 \\ 1.3912819026309295 \\ 1.3480731482996928 \\ 1.2781522025001875 \\ 1.235471471385307 \\ 1.1052568313867783 \\ 0.9516578757114463 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 1 \\ 0.6931471805599453 & 1 \\ 1.3862943611198906 & 1 \\ 2.0794415416798357 & 1 \\ 2.772588722239781 & 1 \\ 3.4657359027997265 & 1 \\ 4.1588830833596715 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \ln c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.4398351280479205 \\ 1.3912819026309295 \\ 1.3480731482996928 \\ 1.2781522025001875 \\ 1.235471471385307 \\ 1.1052568313867783 \\ 0.9516578757114463 \end{pmatrix}$$

取最小二乘意义下的解

$$\begin{pmatrix} 0.6931471805599453 & 1 \\ 1.3862943611198906 & 1 \\ 2.0794415416798357 & 1 \\ 2.772588722239781 & 1 \\ 3.4657359027997265 & 1 \\ 4.1588830833596715 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.6931471805599453 & 1 \\ 1.3862943611198906 & 1 \\ 2.0794415416798357 & 1 \\ 2.772588722239781 & 1 \\ 3.4657359027997265 & 1 \\ 4.1588830833596715 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \ln c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6931471805599453 & 1 \\ 1.3862943611198906 & 1 \\ 2.0794415416798357 & 1 \\ 2.772588722239781 & 1 \\ 3.4657359027997265 & 1 \\ 4.1588830833596715 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1.4398351280479205 \\ 1.3912819026309295 \\ 1.3480731482996928 \\ 1.2781522025001875 \\ 1.235471471385307 \\ 1.1052568313867783 \\ 0.9516578757114463 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 43.72122427 & 14.55609079 \\ 14.55609079 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \ln c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.70484851 \\ 8.74972856 \end{pmatrix}$$

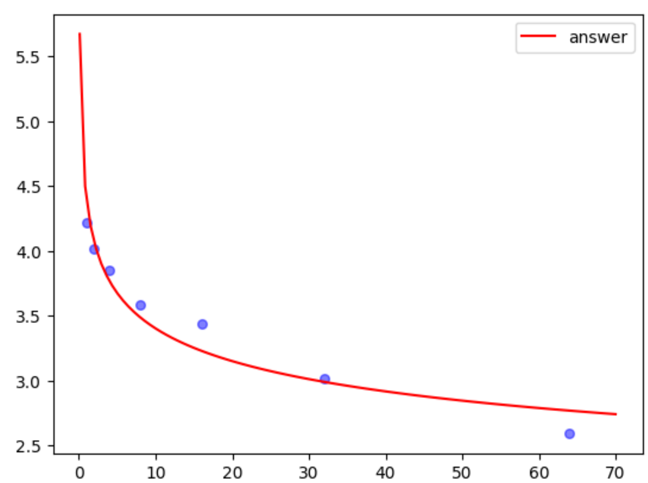
解得

$$\begin{cases} \lambda = -0.1107363 \\ \ln c = 1.48023089 \Rightarrow c = 4.393960092953252 \end{cases}$$

故经验公式为

$$w = 4.394t^{-0.111}$$

拟合结果:



补充:考虑到t的取值为2^n,故将线性公式改写为

$$\lambda \log_2 t + \log_2 c = \log_2 w$$

能使得误差更小且计算量显著下降,即

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 1 \\ 1.0 & 1 \\ 2.0 & 1 \\ 3.0 & 1 \\ 4.0 & 1 \\ 5.0 & 1 \\ 6.0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.0 & 1 \\ 1.0 & 1 \\ 2.0 & 1 \\ 3.0 & 1 \\ 4.0 & 1 \\ 5.0 & 1 \\ 6.0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \log_2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1 \\ 1.0 & 1 \\ 2.0 & 1 \\ 3.0 & 1 \\ 4.0 & 1 \\ 5.0 & 1 \\ 6.0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2.0772429989324603 \\ 2.0071955014042038 \\ 1.944858445807539 \\ 1.8439838440483265 \\ 1.7824085649273733 \\ 1.5945485495503542 \\ 1.372952097911829 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \ln c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34.76895352 \\ 12.62319 \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda = -0.1107363 \\ \ln c = 2.13552177 \Rightarrow c = 4.393960092953256 \end{cases}$$

7-1-4 有数据

t	y
1	4.00
2	6.40
3	8.00
4	8.80
5	9.22
6	9.50
7	9.70
8	9.86

请用$y=\frac{t}{at+b}$来拟合

转换为线性关系

$$\frac{1}{y}=\frac{b}{t}+a$$

由此可得

$$b\begin{pmatrix}1.0\\0.5\\0.3333333333333333\\0.25\\0.2\\0.16666666666666666\\0.14285714285714285\\0.125\end{pmatrix}+a=\begin{pmatrix}0.25\\0.15625\\0.125\\0.11363636363636363\\0.10845986984815617\\0.10526315789473684\\0.10309278350515465\\0.10141987829614606\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}1.0 & 1\\0.5 & 1\\0.3333333333333333 & 1\\0.25 & 1\\0.2 & 1\\0.16666666666666666 & 1\\0.14285714285714285 & 1\\0.125 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25\\0.15625\\0.125\\0.11363636363636363\\0.10845986984815617\\0.10526315789473684\\0.10309278350515465\\0.10141987829614606\end{pmatrix}$$

取最小二乘意义下的解

$$\begin{pmatrix}1.0 & 1\\0.5 & 1\\0.3333333333333333 & 1\\0.25 & 1\\0.2 & 1\\0.16666666666666666 & 1\\0.14285714285714285 & 1\\0.125 & 1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1.0 & 1\\0.5 & 1\\0.3333333333333333 & 1\\0.25 & 1\\0.2 & 1\\0.16666666666666666 & 1\\0.14285714285714285 & 1\\0.125 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.0 & 1\\0.5 & 1\\0.3333333333333333 & 1\\0.25 & 1\\0.2 & 1\\0.16666666666666666 & 1\\0.14285714285714285 & 1\\0.125 & 1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0.25\\0.15625\\0.125\\0.11363636363636363\\0.10845986984815617\\0.10526315789473684\\0.10309278350515465\\0.10141987829614606\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}1.52742205 & 2.71785714\\2.71785714 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.46484162\\1.06312205\end{pmatrix}$$

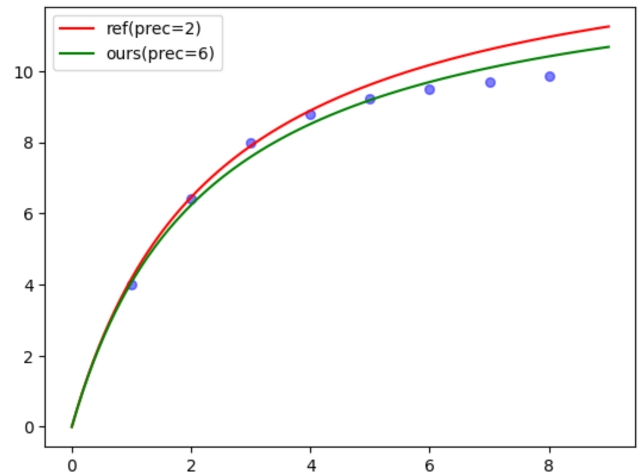
解得

$$\begin{cases}a=0.07458941\\b=0.17160826\end{cases}$$

故经验公式为

$$y=\frac{t}{0.07459t+0.17161}$$

拟合结果(对比参考答案):



数值积分-1

8-1-1 用辛普森公式计算$\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$并估计误差

首先,计算解析解为

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x&=-e^{-x}\Big|_0^1\\&=1-\frac{1}{e}\\&\approx 0.6321205588285577\end{aligned}$$

辛普森公式$(h=\frac{b-a}{2})$

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)$$

由此计算

$$\begin{cases}h=\frac{1}{2}\\f(x_0)=1\\f(x_1)=e^{-\frac{1}{2}}\\f(x_2)=e^{-1}\end{cases}$$

代入得

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x&=\frac{1}{6}[1+\frac{4}{\sqrt{e}}+\frac{1}{e}]\\&=0.6323336800036626\end{aligned}$$

计算残差为

$$|R(I)| < 0.000214$$

8-1-2 已知函数表

x	f(x)
1.8	3.12014
2.0	4.42569
2.2	6.04241
2.4	8.03014
2.6	10.46675

试用牛顿-科茨公式计算$\int_{1.8}^{2.6} f(x)\mathrm{d}x$

使用$n=4$**的牛顿-科茨公式**$(h=\frac{b-a}{4})$

$$I=\frac{4h}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\eta)$$

由题目得

$$\begin{cases} h=0.2 \\ f(x_0)=3.12014 \\ f(x_1)=4.42569 \\ f(x_2)=6.04241 \\ f(x_3)=8.03014 \\ f(x_4)=10.46675 \end{cases}$$

代入得

$$\begin{aligned} \int_{1.8}^{2.6} f(x)\mathrm{d}x &= \frac{8}{900}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)] \\ &= 5.032921866666666 \\ &\approx 5.0329 \end{aligned}$$

数值积分-2

8-2-1 分别用复合梯形公式和复合辛普森公式计算并比较结果

$$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x\ (n=8)$$

$n=8$**,即计算**9**个插值点**

$$\begin{cases} h=\frac{b-a}{n}=0.125 \\ f(x_0)=f(0.0)=0.0 \\ f(x_1)=f(0.125)=0.0311284046692607 \\ f(x_2)=f(0.25)=0.06153846153846154 \\ f(x_3)=f(0.375)=0.09056603773584905 \\ f(x_4)=f(0.5)=0.11764705882352941 \\ f(x_5)=f(0.625)=0.1423487544483986 \\ f(x_6)=f(0.75)=0.1643835616438356 \\ f(x_7)=f(0.875)=0.18360655737704917 \\ f(x_8)=f(1.0)=0.2 \end{cases}$$

复合梯形公式:

$$T_n=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

代入得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x &= h(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\cdots+\frac{f(x_7)+f(x_8)}{2}) \\
&= 0.11140235452954801
\end{aligned}
$$

注:老师提供的电子版教材参考答案对应的解符合疑似有误,所有变量均为正数,不可能加出来一个负数

复合辛普森公式

$n=8$**,需要再额外计算8个插值点**

$$
\begin{cases}
f(x_{0.5}) = 0.015609756097560976 \\
f(x_{1.5}) = 0.046466602129719266 \\
f(x_{2.5}) = 0.07626310772163966 \\
f(x_{3.5}) = 0.1043802423112768 \\
f(x_{4.5}) = 0.13031674208144797 \\
f(x_{5.5}) = 0.1537117903930131 \\
f(x_{6.5}) = 0.17435037720033528 \\
f(x_{7.5}) = 0.1921537229783827
\end{cases}
$$

$$
S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i)+4f(x_{i+0.5})+f(x_{i+1})]
$$

代入得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i)+4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})+f(x_{i+1})] \\
&= 0.11157181325263064
\end{aligned}
$$

8-2-2 用复合辛普森公式计算积分$I=\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$**时,欲使误差小于**$10^{-4}$**,求**$[0,1]$**的最小分割数**$N$

复合辛普森公式的误差公式为

$$
E_{2n} = -\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\zeta)
$$

设

$$
f(x)=e^x
$$

由于$f(x)$**导数不变且**$\zeta\in[0,1]$ **则有**$1\le f^{(4)}(\zeta)\le e$**,故**

$$
|E_{2n}(f)| \le \frac{h^4}{2880}e < \epsilon
$$

即

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{n})^4 &< \frac{2880\epsilon}{e} \\
n &> (\frac{e}{2880\epsilon})^{\frac{1}{4}} \\
\therefore n &= \lfloor(\frac{e}{2880\epsilon})^{\frac{1}{4}}\rfloor + 1
\end{aligned}
$$

代入$\epsilon=10^{-4}$**,解得最小分割数为2**

注:参考答案少了分子上的e**疑似有误,华师大的slide上有类似题目可以佐证(https://math.ecnu.edu.cn/~sfzhu/course/NumerAnal/NumerInt2.pdf)**

常微分方程数值解-1

9-1-1 就初值问题$\begin{cases}y'(x)=ax+b\\y(0)=0\end{cases}$**分别导出显式欧拉法和改进欧拉法的近似解表达式,并与精确解**$y=\frac{1}{2}ax^2+bx$**相比较**

精确解的递推格式为

$$y(x_{i+1}) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + h(ax+b) + \frac{h^2a}{2}$$

显式欧拉法：

$$y_{i+1} = y_i + h(ax+b)$$

与精确解相比，局部截断误差为

$$\begin{aligned} R_i &= y(x_{i+1}) - y_{i+1} \\ &= \frac{1}{2}ax^2 + bx + h(ax+b) + \frac{h^2a}{2} - y_i - h(ax+b) \\ &= \frac{h^2a}{2} \end{aligned}$$

改进欧拉法：

$$\begin{aligned} K_1 &= ax+b \\ K_2 &= ax+b+ah \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(2ax+2b+ah) \\ &= y_i + h(ax+b) + \frac{h^2a}{2} \end{aligned}$$

与精确解的递推格式相同

特征值与特征向量-1

11-1-1 设A为实矩阵，有n个线性无关的特征向量，其n个特征值满足$\lambda_1 = -\lambda_2$且$|\lambda_1| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$证明$\lambda_1, \lambda_2$可按照下式计算

$$\begin{aligned} v_k &= Av_{k-1} \\ \lim_{k\to\infty} \frac{(v_{k+2})_i}{(v_k)_i} &= \lambda_1^2 \end{aligned}$$

由题目条件，$\forall v_0, v_0 \neq \mathbf{0}, \exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_n), s.t.$

$$v_0 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

构造向量序列

$$\begin{aligned} v_1 &= Av_0 \\ &\cdots \\ v_{K+1} &= A^{K+1}v_0 \end{aligned}$$

由此可得

$$v_k = Av_{k-1}$$

由特征值的定义，得

$$\begin{aligned} v_K &= \alpha_1\lambda_1^K x_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^K x_n \\ &= \lambda_1^K[\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^K x_2 + \cdots + \alpha_n(\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^K x_n] \end{aligned}$$

由于$|\lambda_1| > |\lambda_i|(i \neq 1)$，所以$|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$

当$K \to \infty$时，$(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^K \to 0$

当K充分大时，有

$$\begin{aligned} v_k &:= \lambda_1^K \alpha_1 x_1 \\ v_{k+2} &:= \lambda_1^{K+2} \alpha_1 x_1 \end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(v_{k+2})_i}{(v_k)_i} = \lambda_1^2$$