应用随机过程

Application of Stochastic Processes

$$1.01^{365}=27.8$$

$$1.02^{365}=1377.4$$

成功的道路并不拥挤， **因为坚持到最后**

的人并不是很多。

上页 下页 返回

主要教学参考书

教材

《应用随机过程》

张波 张景肖 编

中国人民大学

出版社

上页 下页

参考书

1. 《应用随机过程》

林元烈 编著　清华大学出版社

2.《随机过程》

王风雨　编著　　北京师范大学出版社

上页　下页

前　言

几十年来，由于实际问题的需要和数学工作者的努力，随机过程无论在理论上还是在应用上都有了蓬勃的发展．它的基本知识和方法，不仅为数学、概率统计专业所必需，也为工程技术、生物信息及经济领域的应用与研究所需要．因此，随机分析的方法越来越受到人们的重视，高等院校的学生、工程技术人员、金融工作者，更迫切地需要学习和掌握随机过程的知识．

上页　下页

随机过程通常被视为概率论的动态部分.在概率论中研究的随机现象,都是在概率空间(Ω, F, P)上的一个或有限多个随机变量的规律性.在讨论中心极限定理时也不过是对随机变量序列的讨论.但在实际问题中,我们还需要研究一些随机现象的发展和变化过程,即随时间不断变化的随机变量,而且,所涉及的随机变量通常是无限多个,这就是随机过程所要研究的对象.随机过程以概率论作为其主要的基础知识,为此,我们首先对在本书中经常用到的概率论的基本知识作简要的回顾.

第1章 预备知识

1.1 概率空间

在自然界和人类的活动中经常遇到各种各样的现象，大体上分为两类：必然现象和随机现象 。

具有随机性的现象—随机现象

对随机现象的观察或为观察而进行的实验（有3个特征） —随机试验

随机试验的结果 —**基本事件或样本点。**记作 ω

所有可能的结果称为样本空间。记作 Ω

Ω的子集A由基本事件组成 —A称为事件。

事件的性质 假设A,B,C是任意事件，则他们满足：

(1)交换律 $A \cup B = B \cup A$

(2)结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(3)分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(4)对偶原则 (De Morgan律)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1} A_i} = \bigcap_{i=1} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1} A_i} = \bigcup_{i=1} \overline{A_i}$$

定义1.1 设Ω为样本空间，F是Ω中的某些子集组成的集合族，若满足:

⑴ $\Omega \in F$；

⑵ 如果$A \in F$，则 $\overline{A} \in F$；

⑶ 如果$A_i \in F$, $i = 1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$.

那么，称F 为Ω中的σ - 代数.

(F,Ω)为可测空间，F中的元素称为事件.

性质 假设F是Ω中的任一事件σ－代数，则

(1)$\Phi \in F$;

(2)若果$A_i \in F, i = 1,2,\cdots n$, 则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in F$;

(3)若果$A_i \in F, i = 1,2,\cdots$, 则$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$;

(4)若果$A, B \in F$, 则$A - B \in F, B - A \in F$;

(5) σ-代数必为代数.

上页 下页 返回

例1.1 由Ω的一切事件构成的事件类是事件σ－代数.

(常常它为称为最广泛的σ-代数.)

例1.2 由$F=\{\Omega,\Phi\}$，则F是事件σ-代数。

称作平凡事件σ－代数.

例1.3 对任意事件$A\in\Omega, F=\{\Omega, A, \bar{A}, \Phi\}$

是事件σ-代数。

思考题:

随机试验: 掷一枚骰子，观察出现的点数，

样本空间$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$，下列事件是否构成

σ-代数?

(1) 事件类$F = \{\Omega, \phi, \{1,2,3\}, \{3,4,5,6\}\}$;

(2) 事件类$F = \{\Omega, \phi, \{1,2,\}\{3,4\}, \{5,6\}\}$;

(3) 事件类$F = \{\Omega, \phi, \{1,3,5\}\{2,4,6\}\}$;

定义1.2 对于Ω上任意包含事件A的最小的σ-代数，称为事件A生成的σ-代数，记作$\sigma(A)$.

结论： 设A是Ω中的一个集系，则包含A的最小的σ-代数$\sigma(A)$一定存在.

注:对于Ω中的任意事件类A,必定存在含A的最小事件σ-代数，并且等于Ω上包含A的事件σ-代数$F_i, i=1,2,\cdots$之交，即$\sigma(A)=\bigcap\limits_{i=1} F_i$.

上页 下页 返回

定义1.3

设 $\Omega = R$,由所有半无限区间$(-\infty, a)$生成的σ-代数(即包含$\{(-\infty, a), a \in R\}$的最小$\sigma$-代数),称为$R$上的$Borel\ \sigma$-代数,记作$B(R)$,其中的元素称为$Borel$集合.类似可以定义$R^n$上的$Borel\ \sigma$-代数,记作$B(R^n)$.

显然 $B = \sigma((-\infty, a), \forall a \in R)$.

定义1.4 设F是定义在样本空间Ω上的事件σ－代数，$P(A), A \in F$是定义在F上的非负集函数，且满足

⑴ 对任意$A \in F$，有$0 \le P(A) \le 1$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

⑶ 对任意$A_i \in F$，$i = 1,2,\cdots, A_i \cap A_j = \Phi, i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

则称P是(Ω, F) 上的概率,(Ω, F, P)称作概率空间，$P(A)$称为事件A的概率。

例1.1： $[0,1]$上的$Borel$概率空间：设$\Omega=[0,1]$, $F=B[0,1]$, 即$B[0,1]$是局限在$[0,1]$上的$Borel\ \sigma$-代数, 称$(\Omega,F)=([0,1],B[0,1])$为$[0,1]$上的$Borel$可测空间.$\forall A=[a,b]\in B[0,1]$定义$P(A)=b-a$,称$(\Omega,F,P)$为$[0,1]$上的$Borel$概率空间，称$P$为$[0,1]$上的$Borel$概率测度.

概率的基本性质

(1) $P(\phi)=0$,

(2) 若$A,B\in F$, 则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$

(4) $A,B\in F$, 若$A\subset B \Longrightarrow P(A)\le P(B)$

若$A\subset B \Longrightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

—单调性

(5) 若$A_n\in F, n\ge 1$ 则 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

—次可列可加性

(6) 设 $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \phi$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$

则对任意事件A, 有 $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i)$

(7) 性质(2)的推广，$Jordan$公式

对任意$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j)$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

事件列极限1：假设事件序列$\{A_i\}$,

(1) 如果$A_1 \supset A_2 \supset \cdots A_n \supset \cdots, \quad A_n \uparrow A$

$$\text{则} \lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

(2) 如果$A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n \subset \cdots, \quad A_n \downarrow A$

$$\text{则} \lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

结论： 单调事件(集合)序列必有极限.

(8) 概率的连续性:

定理: 若$\{A_n, n\ge 1\}$是单调递增(或递减)的事件序列

则 $$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

具体情况:

(1)若$A_n \in F$, 且$A_n \uparrow A$,即$A_n \subset A_{n+1}$,且$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n)= P(\lim_{n\to\infty} A_n)= P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n)$$

(2)若$A_n \in F$, 且$A_n \downarrow A$,即$A_n \supset A_{n+1}$,且$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A$

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)= P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n)$$

事件列极限2:

(3) 对于任意事件序列$\{A_n, n=1,2,\cdots\}$,

$$\{\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n,\ k=1,2,\cdots\}\uparrow \qquad \{\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,\ k=1,2,\cdots\}\downarrow$$

因而分别有极限.

定义1.5 $$\liminf_{n\to\infty} A_n \overset{def}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right) \overset{\Delta}{=} \underline{\lim} A_n$$

—— A_n 的下极限

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \overset{def}{=} \bigcap_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \overset{\Delta}{=} \overline{\lim} A_n$$

—— A_n 的上极限

例1.2： $\{x: x \le a\} = \_\_\_\_ \{x: x < a + \frac{1}{n}\}$

$(A)\ \bigcap_{n=1}^{+\infty}$ $(B)\ \bigcup_{n=1}^{+\infty}$

含义：(1) $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$

意味着x属于$\{A_n\}$中无穷多个集合.

(2) $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$

意味着除去$\{A_n,\ n=1,2,\cdots\}$中的有限多个集合外，

x属于该序列的其余集合.

关系：$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$

上页 下页 返回

例1.3：

$\Omega=\{$所以投掷硬币结果“正面”和“反面”组成的序列.$\}$

$F=\{\Omega$的所有子集$\}$，$A_n=\{$第n结果是“正面”$\}$.

则

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \text{有无限多次投掷的结果是“正面”}\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\text{除有限多次外，其余投掷的结果都是“正面”}\}.$$

上页 下页 返回

1.2 随机变量和分布函数

随机变量： **用实数来表示随机实验的各种结果.**

定义1.6 设(Ω, F, P)是概率空间，X是定义在Ω上，取值于实数集R上的函数$(\omega \to X(\omega))$，且对$\forall x \in R$，$\{\omega : X(\omega) \le x\} \in F$，则称$X(\omega)$是$F$上的随机变量。

关于随机变量的几点说明：

(1) $\{\omega : X(\omega) \le a\} \in F$是指所有满足$X(\omega) \le a$,的样本点$\omega$的集合，定义要求$\{\omega : X(\omega) \le a\}$是$(\Omega, F, P)$中的一个事件，因而可以定义它的概率。

(2)定义中ω为自变量，为了书写方便，简记

$\{\omega : X(\omega) \le a\} \triangleq \{X \le a\} = \{X \in (-\infty, a]\}$,以下把$X(\omega)$记为$X$,

一般随机变量符号常用大写字母X,Y,Z等表示。

(3)$X(\omega)$满足$\{\omega : X(\omega) \le a\} \in F$,则易证:

$\forall\, a,b \in R, \{X > a\}, \{X < a\}, \{X = a\}, \{a \le X < b\},$

$\{a < X < b\}, \{a \le X \le b\} \in F.$

定理1.1： 下列命题等价：

(1) X是随机变量；

(2) $\{\omega : X(\omega) > a\} \in F, \forall a \in R$；

(3) $\{\omega : X(\omega) \geq a\} \in F, a \in R$；

(4) $\{\omega : X(\omega) < a\} \in F, a \in R.$

定义1.7 设$X(\omega)$是F上的随机变量，函数

$$F(x)=P(\omega: X(\omega)\le x),\quad -\infty<x<+\infty$$

称为随机变量X的分布函数。

分布函数的含义： 分布函数$F(x)$表示随机变量X取值不超过x的概率 (x为任意实数).

分布函数 $F(x)$ 的性质：

(1) $0\le F(x)\le 1$;

(2) $F(x)$是非降函数，即$x_1<x_2 \Longrightarrow F(x_1)\le F(x_2)$;

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$;

(4) $F(x)$是又连续的，即$F(x+0)=\lim\limits_{t\to x^+} F(t)=F(x)$.

随机变量的类型：

离散型：$P(X = x_k) = p_k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_k \le x} p_k$$

连续型：$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

（其中$f(x)$为概率密度函数，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$）

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

多维随机变量：$X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$

— d维随机向量

上页 下页 返回

多维随机变量联合分布函数：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_d)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_d\le x_d),\ x_k\in R$$

性质： 若$F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$是联合分布函数，则

(1) $0\le F(x_1,x_2,\cdots,x_d)\le 1$;

(2) $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$对每个变量都是单调的；

(3) $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$对每个变量都是右连续的；

(4) $\lim\limits_{x_i\to-\infty}F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_d)=0,$ $\lim\limits_{x_i\to+\infty}F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_d)=1,$ $(i=1,2,\cdots,d)$

(5) $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_d}f(t_1,t_2,\cdots,t_d)dt_d\cdots dt_1$

$$f(x_1,\cdots,x_d)=\frac{\partial^d F(x_1,x_2,\cdots,x_d)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_d}$$

上页 下页 返回

一些常见的分布：

1.离散均匀分布：

分布列： $p_k = \frac{1}{n}, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

2.二项分布：

分布列： 对固定的n和 $0 < p < 1$

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (k \ge 0)$$

称之为以n和p为参数的二项分布.

3.几何分布：

分布列： $p_k = pq^{k-1}, \quad (k \ge 1), \quad p + q = 1$

4.Poisson分布：

分布列： $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (k = 0,1,\cdots), \quad \lambda > 0$

______参数为 λ 的 *Poisson*分布

5.均匀分布：

密度函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (a < b)$

记作 $X \sim U[a,b]$

6.正态分布：

密度函数 $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}] \ , x \in R$

称之为参数为μ和σ^2的正态分布，也称为*Gauss*分布，

记作 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X \sim N(0,1)$称为标准正态分布.

上页 下页 返回

7. Γ 分布:

密度函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $(\alpha>0)$

称之为以α，λ为参数的Γ分布，Γ函数定义为

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha>0)$$

Γ 函数的性质:

(1) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$;

(2) $\Gamma(1)=1$;

(3) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$;

(4) $\Gamma(n+1)=n!$

上页 下页 返回

8.指数分布： 在Γ分布中，令$\alpha=0$，$\lambda>0$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

9. χ^2 **分布：**

在Γ分布中，令$\alpha=\dfrac{n-1}{2}$，n为正整数，$\lambda=\dfrac{1}{2}$

$$f(x)=\left[2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}x^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}},\quad x>0$$

称为自由度为n的χ^2分布.

10.*d*维正态分布：（略）

上页 下页 返回

作业题:

1.设两两独立的随机事件A,B,C满足$ABC=\phi$,

$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,且$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,

求$P(A)$.

2.设随机变量X的概率分布函数

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$$ 求B.

1.3 数字特征、矩母函数与特征函数

随机变量完全由它的概率分布（函数）描述，而确定其分布函数一般来说是相当不容易的。在实际问题中，有时只需要知道随机变量的某些特征值就够了。

一、数字特征

定义1.8: (1) 取值为$\{x_k\}$的离散型随机变量的数学期望

$$EX=\sum_k x_k p_k=\sum_k x_k P(X=x_k)\qquad (\sum_k |x_k|\,p_k<\infty)$$

(2) 连续型随机变量的数学期望

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx\qquad (\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,dF(x)<\infty)$$

——X的一阶矩

上页 下页 返回

(3) X的k阶中心矩

$$m_k = \int_k (x-\mu)^k dF(x) \qquad (\mu = EX)$$

二阶中心矩即方差

$$D(X) = \sigma^2 = \int_R (x-EX)^2 dF(x)$$

(4) 设 $g: R^d \to R^d$为$Borel$可测函数

$$E[g(X_1, X_2, \cdots, X_d)]$$

$$= \int_R \cdots \int_R g(x_1, x_2, \cdots x_d) dF(x_1, x_2, \cdots x_d)$$

为$(X_1, X_2, \cdots, X_d)$的联合分布多元函数的期望.

(5) 设 $g: R^d \to R^d$为$Borel$可测函数

$$E(X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_d^{k_d}) = \int_R \cdots \int_R x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}) dF(x_1, x_2, \cdots x_d)$$

称为$(X_1, \cdots, X_d)$的$(k_1, k_2, \cdots k_d)$阶矩.

(6) 协方差

$$Cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E(XY)-EXEY$$

$$(\mu_X=EX,\ \mu_Y=EY)$$

二、*Rieman-Stieltjes* 积分

前面数字特征的定义已经不再是简单的*Rieman*积分。

复习：*Rieman*积分

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{\Delta}{=} \int_a^b f(x)dx$$

Rieman-Stieltjes 积分：

设$g(x)$,$F(x)$为有限区间$[a,b]$上的实值函数，

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots x_n=b$$

$\Delta F(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\lambda=\max\{\Delta x_i\}$

若当$\lambda\to 0$时，$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta F(x_i)$存在,且与分法及$\xi_i$的取值无关,称该极限值为$g(x)$关于$F(x)$在$[a,b]$上的$R-S$积分,记为

$$\int_a^b g(x)dF(x)\overset{\Delta}{=}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta F(x_i)$$

注：(1) 当$\lambda\to 0$时，意味着$n\to\infty$,但反之不成立。

(2) 当$F(x)=x$时，$R-S$ 积分化为了$Rieman$积分。

(3) $\int_a^{+\infty}g(x)dF(x)=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b g(x)dF(x)$ (广义$R-S$积分.)

(4) $R-S$积分的一个充分条件:若$g(x)$连续，$F(x)$单调，则称$R-S$积分存在.特别地，当$g(x)$连续，$F(x)$为分布函数时，$R-S$积分必存在.

R-S 积分性质：

(1) $\int_a^b [k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x)] dF(x)$

$$= k_1 \int_a^b g_1(x) dF(x) + k_2 \int_a^b g_2(x) dF(x)$$

(2) $\int_a^b g(x) dF(x) = \sum_{i=0}^{n} \int_{c_i}^{c_{i+1}} g(x) dF(x)$

$(a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n+1} = b)$ —— 可加性

(3) $\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$

注：$R-S$积分与$Rieman$积分的最大的不同：

$Rieman$积分：$\int_{a^-}^{a} f(x)dx = 0$

$R-S$积分：$\int_{a^-}^{a} dF(x)dx = \lim\limits_{\delta \to 0^+} \int_{a-\delta}^{a} dF(x) = F(a) - F(a^-)$

(即等于a点处的跳跃度.)

当$F(x)$是一个阶梯函数时，设$F(x)$在$x=x_i$处有跳跃度

$p_i\ (i=1,2,\cdots)$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)=\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i \quad \text{(包含了离散型)}$$

— 转化为判别级数是否收敛.

离散、连续型的统一表达式：

$$EX^k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x)$$

$$E(X-EX)^k=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^k dF(x)$$

四、矩母函数与特征函数

1. 矩母函数（**moment generating function**)

定义1.9： 随机变量X的矩母函数定义为

$$\varphi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x)$$ （$F_X(x)$为X的分布函数）

显然 $$\varphi_X'(t) = E(Xe^{tX})$$

$$\varphi_X^{(n)}(t) = E(X^n e^{tX})$$

$$E(X^n) = \varphi_X^{(n)}(0)$$ — 矩母函数由此得名.

可以证明矩母函数与分布函数是一一对应的.

当矩母函数存在时，能够用矩母函数刻画随机变的分布函数. 当矩母函数不存在时,常用特征函数来描述.

矩母函数的性质：

设$\varphi_X(t)$是X 的矩母函数，则

$(1)\varphi_X(0)=\int_R dF_X(x)=1;$

$(2)\varphi_X^{(n)}(0) = E(X^n);$

(3)若X, Y是相互独立的随机变量，则e^{tX}与e^{tY}也相互独立，且 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

上页 下页 返回

2. 特征函数（characteristic function）

设X,Y为二维实随机变量，则称

$$Z = X + iY$$ ——复随机变量

$$EZ = EX + iEY$$ ——复随机变量的数学期望

定义1.10： 随机变量X的特征函数定义为

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_X(x)$$

（$F_X(x)$为X的分布函数）

$$\because \quad e^{itx} = \cos tx + i\sin tx$$

$$\therefore \quad \psi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos tx) + iE(\sin tx)$$

特征函数是一个实变量的复值函数.

上页 下页 返回

特征函数的性质：

(1) $\psi(0)=1,\quad |\psi(t)|\le 1,$ ——有界性

(2) $\psi(-t)=\overline{\psi(t)}$ ——共轭对称性

(3) $\psi(t)$在$(-\infty,+\infty)$上是一致连续的.

(4) 若$a,b\in R$，$Y=aX+b$，则Y的特征函数为

$$\psi_Y(t)=e^{ibt}\psi_X(at)$$

(5) 随机变量X，若EX^n存在，则当$k\le n$时

$$\psi^{(k)}(0)=i^kE(X^k)\quad 或 \quad E(X^k)=(-i)^k\psi^{(k)}(0)$$

上页 下页 返回

(6) 设相互独立的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$的特征函数分别为$\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_n(t)$，则$\sum_{k=1}^{n} X_k$的特征函数是$\prod_{k=1}^{n} \psi_k(t)$.

(7) 特征函数与分布函数相互唯一确定.

特别地，当$F'(x) = f(x)$存在时，有

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) \qquad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \psi(t) dt \qquad (2)$$

(2)式恰好是可积函数$\psi(t)$的傅里叶变换.

例3.1： 设X服从参数为λ的泊松分布，求其特征函数.

例3.2： 设X服从$[a,b]$上的均匀分布，求其特征函数.

例3.3： 设$X \sim B(n,p)$,求X的特征函数以及EX,DX

例3.4： 求正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的特征函数.

例3.5： 随机变量X在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上服从均匀分布，

$Y=\cos X$，利用特征函数求Y的概率密度.

作业题:

(1) 求指数分布的特征函数.

(2) 求几何分布的特征函数.

上页 下页 返回

1.4 条件概率 条件期望 独立性

一、条件概率

1. 定义： 设Ω为样本空间，A,B为任意两个事件，

若$P(B)>0$，则称

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B出现的情况下，事件A的条件概率，

简称事件A关于事件B的条件概率.

1. 基本公式

定理1:(乘法公式) $P(AB)=P(B)P(A/B)$

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为任意n个事件$(n\geq 2)$

若$P(A_1A_2\cdots A_n)>0$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

定理2:(全概率公式)

设$\{B_n\}$是Ω的一个分割,$(B_i\cap B_j=\phi,\ \bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega)$,

设$P(B_i)>0,\ \forall 1\le i\le n, A\in F$,则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)$$

定理3:(Bayes公式)

对任意事件A,若$P(A)>0$,有

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)}$$

二、独立性

1. 定义： 若两个事件A,B满足

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A，B相互独立.

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个事件，如果对任意$s(2\le s\le n)$和$1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_s})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_s})$$

则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立.

注1：两两独立并不包含独立性。

例：设随机实验是抛掷两枚均匀的硬币.

$A_1=\{$第一次投掷结果是正面$\}$,

$A_2=\{$第二次投掷结果是正面$\}$,

$A_3=\{$两次投掷结果都是正面$\}$.

问：(1) A_1,A_2,A_3是否两两独立?

(2) A_1,A_2,A_3三个事件是否独立?

注2

等式 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ 不包含独立

设试验是 抛掷两个均匀的骰子（正六面体）：

$$A = \{\text{第一次仍得}1,2\text{或}5\}$$

$$B = \{\text{第二次仍得}4,5\text{或}6\}$$

$$C = \{\text{两次仍得点数之和为}9\}$$

我们有

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B),$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{36} = P(A)P(C),$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{36} = P(B)P(C).$$

但是 $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{36} = P(A)P(B)P(C).$

2. 独立性的性质：

定理4： 若事件A，B相互独立，则A与$\overline{B}$；$\overline{A}$与B；$\overline{A}$与$\overline{B}$分别相互独立。

推论1： 若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - P(A_i)]$$

推论2： 随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的充分必要条件是它们的联合分布函数可分解为：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

证明：$\because F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$

$$= P(X_1 \le x_1)P(X_2 \le x_2)\cdots P(X_n \le x_n)$$

$$= F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

定理5： (1) 随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的

且$X_i \in L^1$ [即 $\int |x| dF(x) < \infty$]

则
$$E(\prod_{k=1}^{n} X_k) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$

(2) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n \in L^2$是相互独立的

则
$$Var(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$$

定理6: $Borel-Cantelli$引理

设$\{A_n, n\geq 1\}$是一列事件，即 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}\subset F$

(1) 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty,$

则 $$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

(2) 如果$\{A_n\}$是独立事件列, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty,$

则 $$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$$

四、条件期望

1. 边缘分布 设(X,Y)的分布函数为$F(X,Y)$，则X,Y的分布函数为$F_X(x),F_Y(y)$， 依次称为关于X和Y的边缘分布函数，且有

$$F_X(x)=P(X\le x,Y<+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\}dx\triangleq F(x,+\infty)$$

同理 $F_Y(y)\triangleq F(+\infty,y)$

若 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ ——称X,Y独立.

离散型：若(X,Y)的联合分布律 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$

则 $$P_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\qquad(i=1,2,\cdots)$$

$$P_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\qquad(j=1,2,\cdots)$$

$P_{i\cdot}$及$P_{\cdot j}$分别称为(X,Y)关于X和Y的边缘分布律.

X和Y相互独立的充要条件是： $P_{ij} = P_{i\cdot}P_{\cdot j}$

连续型：若随机变量(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)$,

则 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$f_X(x)$及$f_Y(y)$分别称为(X,Y)关于X和Y的边缘分布概率密度.

X和Y相互独立的充要条件是：

$$f(x,y)= f_X(x)\,f_Y(y)$$

2. 条件分布函数

离散型： 若 $P(Y=y_j)>0$ 则称

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$$

为条件$Y=y_j$下，随机变量X的分布律.

同理 $P(Y=y_j\mid X=x_i)=\dfrac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\dfrac{P_{ij}}{P_{i\cdot}}$

称为条件$X=x_j$下，随机变量X的分布律.

连续型：$f(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$， $f(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

称为在条件$Y=y$下随机变量X的条件分布律.

上页 下页 返回

3. 条件数学期望

条件数学期望是随机过程中最基本最重要的概念之一.

离散型：X的数学期望 $EX = \sum_i x_i p(X = x_i)$

$$E(X \mid Y = y_i) \triangleq \sum_i x_i p(X = x_i \mid Y = y_i)$$

___称为给定$Y = y_j$时,X的条件数学期望.

异同：

而 $E(X \mid Y = y_i)$ 是局限在$\omega \in \{\omega : Y(\omega) = y_j\} \triangleq B_j$时，

$X(\omega)$取值局部$(\omega \in B_j)$的加权平均.

上页 下页 返回

具体地：记 $B_j=\{\omega:Y(\omega)=y_j\}, A_i=\{\omega:X(\omega)=x_i\}$,

于是,整个样本空间Ω按照Y的不同取值分为$B_1,\cdots,B_j,\cdots$

等互不相容的事件 $(\Omega=\sum_j B_j)$, 同理 $\Omega=\sum_i A_i$.

当 $A_iB_j=\phi$时, $p(X=x_i,Y=y_i)=0,\ p(X=x_i\mid Y=y_i)=0$

$$E(X\mid Y=y_i)=\sum_i x_i p(X=x_i\mid Y=y_i)$$

$$=\sum_{i:A_iB_j\neq\phi} x_i p(X=x_i\mid Y=y_i)$$

因此 $E(X\mid Y=y_i)$ 是局限在$\omega\in B_j$时，

$X(\omega)$的局部加权平均.

上页 下页 返回

显然 $E(X|Y=y_1),\cdots,E(X|Y=y_j),\cdots$,依赖于$Y=y_j$,即依赖于$\omega\in B_j=\{\omega:Y(\omega)=y_j\}$. 这样,从全局样本空间$\Omega$及对$\omega\in\Omega$可以变化的观点看，有必要引进一个新的随机变量，记作$E(X|Y)$.

当$\omega\in B_j$时，它取值为$E(X|Y=y_j)$.

称随机变量$E(X|Y)$为随机变量 X关于随机变量Y的条件数学期望.

记 $I_{B_j(\omega)}=\begin{cases}1 & \omega\in B_j=\{\omega:Y(\omega)=y_j\}\\ 0 & \omega\notin B_j=\{\omega:Y(\omega)=y_j\}\end{cases}$

显然 $I_{B_j(\omega)}=1\leftrightarrow Y(\omega)=y_j$ 发生.

亦记 $I_{B_j(\omega)}=I_{(Y=y_j)}(\omega)$.

定义： 记 $E(X\mid Y)\triangleq\sum\limits_j I_{(Y=y_j)}(\omega)E(X\mid Y=y_i)$

称$E(X\mid Y)$ 为X关于随机变量Y的条件数学期望.

$E(X\mid Y)$ 的直观意义：

(1) $E(X\mid Y)$ 是随机变量Y的函数,当$\omega\in\{\omega:Y(\omega)=y_j\}$ 时, $E(X\mid Y)$ 取值为$E(X\mid Y=y_j)$,事实上,它是局部平均$\{E(X\mid Y=y_j),j\in N\}$的统一表达式.

上页 下页 返回

(2) 当 $E(X \mid Y = y_j) \neq E(X \mid Y = y_k)$ $(j \neq k)$ 时，

$$P[E(X \mid Y) = E(X \mid Y = y_j)] = P(Y = y_j);$$

否则, 令 $D_j = \{k : E(X \mid Y = y_j) = E(X \mid Y = y_k)\}$

则 $P[E(X \mid Y) = E(X \mid Y = y_j)] = \sum_{k \in D_j} P(Y = y_j)$

(3) 由于$E(X \mid Y)$ 是随机变量Y的函数,

故它的数学期望为:

$$E(E(X \mid Y)) = \sum_j E(X \mid Y = y_j) \; P(Y = y_j)$$

例 1 随机变量 (X,Y) 的联合分布律如表 1.1.

表 1.1

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{\cdot j}$
1	2/27	4/27	1/27	7/27
2	5/27	7/27	3/27	15/27
3	1/27	2/27	2/27	5/27
$p_{i\cdot}$	8/27	13/27	6/27	

试求 $E(X|Y)$ 的分布律, EX 及 $E(E(X|Y))$.

定理:

(1) 对一切随机变量X和Y，有 $E(X)=E[E(X\mid Y)]$

(2) $E(X\mid X)=X$

例2:

一只老鼠被困在一个有三个通道的隧道之中，从第一个通道行进两个小时后将到达安全地带；从第二个通道行进三个小时后将绕回隧道原地；从第三个通道行进五个小时后将绕回隧道原地. 假定该老鼠对此隧道的通道情况完全未知，那么该老鼠到达安全地带所需要的平均时间是__________________(小时)；

上页 下页 返回

五、独立随机变量和的分布——卷积公式

设X_1,X_2相互独立，$F_1(x),F_2(x)$分别是它们的分布函数，令$X=X_1+X_2$,其分布函数为$F_X(x)$，则由独立性有

$$F_X(x)=P(X_1+X_2\le x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{X_1+X_2\le x\mid X_1=t\}dF_1(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}P(X_2\le x-t)dF_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(x-t)dF_1(t)$$

$$\triangleq(F_1*F_2)(x)$$ —— 称为 $F_1(x),F_2(x)$的卷积

一般地，对有界函数$g(x)$和一个单调函数$F(x)$,

$F(x)$与$g(x)$的卷积定义为:

$$(F*g)(x)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-t)dF(t)$$

上页 下页 返回

注:

(1) $F*g$与顺序有关，$g*F$可能没有意义.

(2) 当$F(x)$与$g(x)$都是分布函数时,卷积可以交换顺序.

(3) 当$F(x),G(x),H(x)$都是分布函数时，有

$$[(F*G)*H](x)=[F*(G*H)](x)$$

——结合律

$$[F*(G+H)](x)=(F*G)(x)+(F*H)(x)$$

——分配律

(4) 当$X_k, k=1,2,\cdots,n$是独立同分布$F(x)$ 的随机变量，

令 $S_0=0,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k,\ n=1,2\cdots,$ 则有

$$F_0(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases},\qquad F_n(x)=(F*F_{n-1})(x)\ ,\ n=1,2,\cdots$$

$F_n(x)$称为$F(x)$的n重卷积.

$$\because\quad F_n(x)=P(X_1+X_2+\cdots+X_n\leq x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{X_1+X_2+\cdots+X_n\leq x\,|\,X_1=t\}dF(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}P(X_2+\cdots+X_n\leq x-t)dF(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{n-1}(x-t)dF(t)\triangleq(F*F_{n-1})(x)$$

上页 下页 返回

思考题1: 假设随机变量$X(\omega)$有密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$,而随机变量$Y(\omega)$在$(0,X)$

上有均匀分布，求$Y(\omega)$的概率密度函数$f_Y(y)$.

思考题2：设A,B为两个随机事件，且

$$P(A)=\frac{1}{4},P(B\mid A)=\frac{1}{3},P(A\mid B)=\frac{1}{2},$$

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求:(1)二维随机变量(X,Y)的分布律;

(2)$Z=X^2+Y^2$的分布律.

上页 下页 返回

思考题3: 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$;

(2) 求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$;

(3) 求条件概率$P(X\le 1|Y\le 1)$.

作业1: 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	$1/4$	0	0	$1/16$
2	$1/16$	$1/4$	0	$1/4$
3	0	$1/16$	$1/16$	0

(1)求X,Y的边缘分布律;

(2)判断X与Y是否相互独立;

(3)求$X=2$时Y的条件数学期望.

上页 下页 返回

作业2：设随机变量X,Y 满足：对任给的x和y，

$$E(Y\mid X=x)=-x+5,$$

$$E(X\mid Y=y)=\frac{1}{2}y+3,$$

求 EX,EY

第2章 随机过程的基本概念和基本类型

2.1 基本概念

在概率论中，我们研究了随机变量，n 维随机向量。

在极限定理中，我们研究了无穷多个随机变量，但局限在它们相互独立的情形。将上述情形加以推广，即研究一族无穷多个、相互有关的随机变量，这就是随机过程。

定义2. 1：**设** (Ω, Σ, P)**是一概率空间，对每一个参数** $t \in T$, $X(t,\omega)$**是一定义在概率空间** (Ω, Σ, P) **上的随机变量，则称随机变量族** $X_T = \{X(t,\omega); t \in T\}$ **为该概率空间上的一随机过程。**T **称为参数集。**

上页 下页 返回

随机过程的两种描述方法：

用映射表示 X_T, $X(t,\omega)$： $T\times\Omega\to R$

即 $X(\cdot,\cdot)$ 是一定义在 $T\times\Omega$ 上的二元单值函数，

固定 $t\in T$, $X(t,\cdot)$ 是一定义在样本空间 Ω 上的函数，

即为一随机变量；

对于固定的 $\omega_0\in\Omega$, $X(t,\omega_0)$ 是一个关于参数 $t\in T$ 的函数，通常称为样本函数，或称随机过程的一次实现。

记号 $X(t,\omega)$ 有时记为 $X_t(\omega)$ 或简记为 $X(t)$.

参数 T 一般表示时间或空间。

参数常用的一般有：

(1) $T=N_0=\{0,1,2,\cdots\}$, 此时称之为随机序列或时间序列. 随机序列写为$\{X(n),\ n\ge 0\}$ 或$\{X_n, n=0,1,\cdots\}$.

(2) $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

(3) $T=[a,b]$ 其中a可以取0或$-\infty$, b可以取$+\infty$.

当参数取可列集时，一般称随机过程为随机序列。

随机过程$\{X(t);t\in T\}$可能取值的全体所构成的集合称为此随机过程的状态空间，记作S. S中的元素称为状态。状态空间可以由复数、实数或更一般的抽象空间构成。

根据T和S的不同过程可以分成不 同的类:

参数空间分类:

$$\begin{cases} \text{离散参数} & \text{如 } T=\{0,1,2\cdots\} \\ \text{连续参数} & \text{如 } T=\{t \mid t \geq 0\} \end{cases}$$

状态空间分类:

$$\begin{cases} \text{离散状态} & S\text{取值是离散的} \\ \text{连续状态} & S\text{取值是连续的} \end{cases}$$

随机过程分为以下四类：

(1)离散参数离散型随机过程；

(2)连续参数离散型随机过程；

(3)连续参数连续型随机过程；

(4)离散参数连续型随机过程。

以随机过程的统计特征或概率特征的分类，一般有：

独立增量过程；

二阶矩过程；

平稳过程；

Poission过程；

更新过程；

Markov过程；

鞅；

维纳过程。

随机过程举例

例2.1

随机游动：一醉汉在路上行走，以概率p前进一步，以概率$1-p$后退一步（假设其步长相同),以$X(t)$记他在t时刻在路上的位置，则$X(t)$就是直线上的随机游动.

例2.2 抛掷一枚硬币，样本空间为 $S=\{H,T\}$定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{当出现 H 时}\\ 2t, & \text{当出现 T 时}\end{cases} \quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 $P\{H\}=P\{T\}=1/2$，则 $\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是一随机过程。

上页 下页 返回

例2.3

*Brown*运动：英国植物学家*Brown*注意到漂浮在液面上的微小粒子不断进行无规则的运动，这种运动后来称为*Brown*运动。同时分子大量随机碰撞的结果。记$(X(t),Y(t))$为粒子在平面坐标上的位置，则它是平面上的*Brown*运动。

2.2 有限维分布与Kolmogvrov定理

一、随机过程的分布函数

1. 一维分布函数

设$X(t)$是一随机过程，称

$$F_t(x)\triangleq F(t,x)=P\{X(t)\le x\}$$

$--$称为$\{X(t)\}$的一维分布函数.

若 $\exists$ $f(t,x)\ge 0,$

使得 $F_t(x)=F(t,x)=\int_{-\infty}^{x} f(t,y)dy$

则称 $f(t,x)$ 为$\{X(t)\}$的一维概率密度.

2. 二维分布函数

设二维随机向量$\{(X(t_1),X(t_2)) \quad (t_1,t_2)\in T\}$

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)\triangleq F(t_1,t_2,x_1,x_2)=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2\}$$

——称为二维随机向量$(X(t_1),X(t_2))$的分布函数。

若 $\exists$ $f(t_1,t_2,x_1,x_2)\ge 0,$

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=F(t_1,t_2,x_1,x_2)$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(t_1,t_2,y_1,y_2)dy_1dy_2$$

——则称 $f(t_1,t_2,x_1,x_2)$为二维概率密度.

上页 下页 返回

3. n维分布函数

n维随机向量$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$的联合分布函数为

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) \triangleq F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)$$

$$= P\{X(t_1) \le x_1,\cdots,X(t_n) \le x_n\}$$

若 $\exists\ f(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n) \ge 0$,

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\cdots,t_n;y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n$$

称为n维随机向量$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$的$n$维分布函数.

——则称 $f(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)$为$n$维概率密度.

4. 有限维分布族

一维、二维，…，n维分布函数的全体：

$$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n \in T, n \ge 1\}$$

——称为有限维分布族

5. 有限维分布族的性质

(1) 对称性

$$F_{t_{j_1},\cdots,t_{j_n}}(x_{j_1},\cdots,x_{j_n}) = F(t_{j_1},\cdots,t_{j_n};x_{j_1},\cdots,x_{j_n})$$

$$= P\{X(t_{j_1}) \le x_{j_1},\cdots,X(t_{j_n}) \le x_{j_n}\}$$

$$= P\{X(t_1) \le x_1,\cdots,X(t_n) \le x_n\}$$

$$= F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)$$

(2) **相容性** 对于 $m<n$ 有

$$F_{t_{j_1},\cdots,t_{j_m},t_{j_{m+1}},\cdots,t_{j_n}}(x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)$$

$$=F_{t_{j_1},\cdots,t_{j_m}}(x_1,\cdots,x_m)$$

注1： 随机过程的统计特性完全由它的有限维分布族决定。

注2： 有限维分布族与有限维特征函数族相互唯一确定。

问题： 一个随机过程 $\{X(t);t\in T\}$ 的有限维分布族，是否描述了该过程的全部概率特性？

定理： （Kolmogorov存在性定理）

设分布函数族 $\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n \in T, n \geq 1\}$ 满足以上提到的对称性和相容性，则必有一随机过程 $\{X(t); t \in T\}$，使 $\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\ t_1,\cdots,t_n \in T, n \geq 1\}$ 恰好是 $\{X(t); t \in T\}$ 的有限维分布族，即：

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = P\{X(t_1) \leq x_1,\cdots,X(t_n) \leq x_n\}$$

定理说明： $\{X(t); t \in T\}$ 的有限维分布族包含了 $\{X(t); t \in T\}$ 的所有概率信息。

例2.4

袋中有一个白球，两个红球，每隔单位时间从袋中任取一球后放回，对每一个确定的t对应随机变量

$$X(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{3} & \text{如果对}t\text{时取得红球}\\ e^{t} & \text{如果对}t\text{时取得白球}\end{cases}$$

试求这个随机过程的一维分布函数族.

上页 下页 返回

例2.5

利用抛掷硬币的试验定义一个随机过程.

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & 出现正面\\ 2t, & 出现反面\end{cases}\quad t\in R$$

设出现正面反面的概率是相同的。

(1)写出$X(t)$的所有样本函数（实现）；

(2)写出$X(t)$的以为分布函数$F_1(x;\frac{1}{2})$和$F_1(x;1)$.

*Kolmogorov*定理说明，随机过程的有限维分布族是随机过程概率特征的完整描述，但在实际问题中，要知道随机过程的全部有限维分布族是不可能的。因此，人们想到了用随机过程的某些特征来刻画随机过程的概率特征。

二、随机过程的数字特征

1. 均值函数

随机过程$\{X(t);t\in T\}$ 的均值函数定义为：(假设是存在的)

$$\mu_X(t)\triangleq m(t)=E\{X(t)\}$$

注：$m(t)$是$X(t)$的所有样本函数在时刻t的函数值的平均，它表示随机过程$X(t)$ 在时刻t的摆动中心。

2. 方差函数

随机过程 $\{X(t);t\in T\}$的方差函数定义为：

$$D(X(t))=E\{[X(t)-\mu_X(t)]^2\}=E\{[X(t)-m(t)]^2\}$$

注1: 均方差函数$\sigma(t)=\sqrt{D(t)}$ 表示$X(t)$在各个时刻t对于均值$m(t)$的偏离程度。

注2: 若$\forall t\in T, E[X^2(t)]$ ∃, 称$\{X(t)\}$是二阶矩过程。

3. (自)协方差函数

$X(t)$, $t_1,t_2\in T$ 的状态$X(t_1)$, $X(t_2)$的二阶中心混合矩

$$\gamma_X(t_1,t_2)\triangleq E\{[X(t_1)-m(t_1)][X(t_2)-m(t_2)]\}$$

——$X(t)$的自协方差函数，简称协方差函数。

当$t_1=t_2$时,

$$D[X(t)]=Var[X(t)]=\gamma_X(t,t)=E[X(t)-m(t)]^2$$

$$=E[X(t)-E(X(t))]^2=E[X(t)]^2-[E(X(t))]^2$$

上页 下页 返回

4. (自)相关函数

$X(t)$，$t_1,t_2 \in T$ 的状态$X(t_1)$，$X(t_2)$的二阶原点混合矩

$$R_X(t_1,t_2) \triangleq E[X(t_1)X(t_2)]$$

——$X(t)$的自相关函数，简称相关函数。

注1: 当$E[X(t)]=m(t)=0$时，$R_X(t_1,t_2)=\gamma_X(t_1,t_2)$

注2: $\gamma_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m(t_1)m(t_2)$

注3: $\gamma_X(t_1,t_2)$及$R_X(t_1,t_2)$反映了随机过程$X(t)$在时刻t_1和t_2时的线性相关程度。

注4: 对两个随机过程的关系，要引进互协方差函数或互相关函数来描述它们的线性关系。

5. (互)协方差函数

设$\{X(t),\ t\in T\}$,$\{Y(t),\ t\in T\}$是两个二阶矩过程，则称

$$\gamma_{XY}(t_1,t_2)\triangleq E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\}$$

——$X(t)$，$Y(t)$的互协方差函数。

其中：$m_X(t)=E[X(t)]$，$m_Y(t)=E[Y(t)]$

6. 互相关函数

$$R_{XY}(t_1,t_2)\triangleq E[X(t_1)Y(t_2)]$$

——$X(t)$，$Y(t)$的互相关函数。

注：$\gamma_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$

7. 互不相关

若 $\gamma_{XY}(t_1,t_2)=0$ ——称$X(t)$，$Y(t)$互不相关。

注：若 $X(t),Y(t)$互不相关，则

$$R_{XY}(t_1,t_2)=m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

即 $$E[X(t_1)Y(t_2)]=E[X(t_1)]E[Y(t_2)]$$

8. 特征函数

记：

$$\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$\triangleq E\{\exp\{i[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]\}\}$$

称 $\{\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$

为随机过程 $\{X(t);t\in T\}$ 的有限维特征函数族。

上页 下页 返回

例2.6

设随机过程$X(t)=U\cos 2t$，其中U是随机变量，且$E(U)=5$，$D(U)=5$.求:

(1) 均值函数；（2）协方差函数；（3）方差函数.

例2.7

设有两个随机过程$X(t)=Ut^2$，$Y(t)=Ut^3$,其中U是随机变量，且$D(U)=5$. 试求它们的互协方差函数。

作业1

设A,B是两个随机变量，试求随机过程$X(t)=At+3B$，$t\in T=(-\infty,+\infty)$的均值函数和自相关函数.若A,B相互独立,且$A\sim N(1,4)$, $B\sim U(0,2)$,则$m_X(t)$及$R_X(t_1,t_2)$为多少?

上页 下页 返回

2.3 随机过程的基本类型

一、严平稳过程

定义1： 设随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$,若对$\forall n\ (n=1,2,\cdots)$, $t_1,\cdots,t_n\in T$和任意实数τ，当$t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau\in T$时,$(X(t_1),\cdots,X(t_n))$和$(X(t_1+\tau),\cdots,X(t_n+\tau))$有相同的分布函数，即

$$F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$$

$$=P\{X(t_1+\tau)\le x_1,\cdots,X(t_n+\tau)\le x_n\}$$

$$=F(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau;x_1,\cdots,x_n)$$

则$\{X(t),\ t\in T\}$称为严平稳过程.

平稳过程的参数T:

$\begin{cases} \text{可以是连续的，} & \text{如} t \in [0,+\infty),(-\infty,+\infty) \\ \text{可以是离散的，} & \text{如} t \in \{0,\pm1,\pm2,\cdots\},\{0,1,2,\cdots\} \end{cases}$

二、严平稳过程的特点

1. 严平稳过程$X(t)$的一维概率密度$f(t;x)$与t无关；

二维概率密度$f(t_1,t_2;x_1,x_2)$仅与$\tau = t_1 - t_2$有关，

而与时间的起点无关。

2. 若严平稳过程存在二阶矩 (即 $E[X(t)]^2 < \infty$), 则

(1) 均值函数为常数: $m(t) = E[X(t)] = m$

(2) 协方差函数 $\gamma_X(t_1,t_2)$,(自)相关函数$R_X(t_1,t_2)$

仅是时间差$\tau = t_1 - t_2$的函数.

三、宽平稳过程 (简称平稳过程)

定义2： 设随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$,如果它满足：

(1) $X(t)$是二阶矩过程；

(即所以二阶矩存在 $E[X(t)]^2<\infty$)

(2) 均值函数为常数：即 $m(t)=E[X(t)]=m$;

(3) 协方差函数 $\gamma_X(t_1,t_2)$,(自)相关函数$R_X(t_1,t_2)$

仅依赖于时间差$\tau=t_1-t_2$.

则称$X(t)$为宽平稳过程，或二阶 平稳过程.

当T为整数集时，称$\{X(t)\}$为平稳时间序列.

注1： 严平稳过程不一定是宽平稳过程。

因为：严平稳过程不一定是二阶矩过程。若严平稳过程存在二阶矩，则它一定是宽平稳过程.

注2： 宽平稳过程也不一定是严平稳过程。

因为：宽平稳过程只保证一阶矩二阶矩不随时间的推移而改变，这当然不能保证其有限维分布不随时间而推移。

例2.8

设$\{X(t)\}$是相互独立同分布的随 机变量序列,其中$T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,且均值和方差分别为$E[X(t)]=0$, $D[X(t)]=\sigma^2$,试讨论$X(t)$的平稳性。

例2.9

设随机序列$\{X(t)=\sin 2\pi t\eta, t\in T\}$,其中$T=\{1,2,\cdots\}$, η是[0,1]上服从均匀分布的随机 变量，试讨论随机序列$X(t)$的平稳性.当$\{X(t) \quad t\geq 0\}$时，讨论其平稳性.

四、平稳过程相关函数的性质

性质1： $R_X(0) = E[X^2(t)] \geq 0$

性质2： $R_X(\tau) \leq R_X(0)$

柯西-许瓦兹不等式：

$$|E(XY)|^2 \leq (EX^2)(EY^2)$$

或 $$|E(XY)| \leq \sqrt{(EX^2)(EY^2)}$$

结论： (自)相关函数$R_X(\tau)$在$\tau = 0$时取得最大值.

性质3： $R_X(\tau)$为偶函数. 即 $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$

性质4： $R_X(\tau)$是非负定的.

即对任意数组$t_1,\cdots,t_n\in T$和任意n个不全为零的实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$都有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_jR_X(t_i-t_j)\geq 0$$

注:

自相关函数的非负定性是平稳过程最本质的特性，因为，任一连续函数，只要具有非负定性，那么该函数必定是某平稳过程的自相关函数.

定义: 设$\{X(t), t\in T\}$与$\{Y(t), t\in T\}$是两个平稳过程,

如果对任意的$t, t\in T$,有 $E[X(t+\tau)Y(t)] = R_{XY}(\tau)$

则称 $X(t)$与$Y(t)$平稳相关.

注:

两个平稳过程当它们的 互相关函数(或互协方差函数)仅依赖τ时,它们才是平稳相关.

性质5: $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$

性质6: $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$

性质7: $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$

性质8： $2|R_{XY}(\tau)| \le R_X(0)+R_Y(0)$

性质9：

若平稳过程$X(t)$与$Y(t)$是平稳相关的，则其和$Z(t)=X(t)+Y(t)$也是平稳过程,其相关函数为

$$R_Z(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)$$

例2.10： 设$S(t)$是一周期为T的函数，$\theta \sim U[0,T]$，称$X(t)=S(t+\theta)$为随机相位周期过程，试讨论它的平稳性.

五、独立增量过程

定义1 设$\{X(t) \quad t\in T\}$是一随机过程,若对任意正整数$n,\forall n\in N$,及$t_1,\cdots,t_n\in T$，$t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n$,

随机过程的增量:

$$X(t_2)-X(t_1),\ X(t_3)-X(t_2),\cdots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$$

是相互独立的，则称$X(t)$为独立增量过程。

例2.11:

设$\{X(n),\ n=0,1,2,\cdots\}$是相互独立的随机序列，

令 $Y(i)=\sum\limits_{n=0}^{i}X(n)$, 则 $\{Y(i),\ i=0,1,2,\cdots\}$

是一独立增量过程.

若对任何 $t_1, t_2 \in T$ 有

$$X(t_1+h)-X(t_1) \overset{d}{=} X(t_2+h)-X(t_2)$$

则称$\{X(t),\ t\in T\}$为平稳增量过程.兼有独立增量和平稳增量的过程称为 平稳独立增量过程。

定义2 若二阶矩过程$\{X(t),\ t\in T\}$对任意的

$t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$， $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$， 有

$$E\{[X(t_2)-X(t_1)][X(t_4)-X(t_3)]\}=0$$

则称$\{X(t),\ t\in T\}$为正交增量过程。

六、遍历性定理

(1) $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$,其中$\{X_n\}$为独立同分布随机变量序列，$E(X_n^2) < \infty$; $E(X_n) = m, n = 0,1,2,\cdots$.

(2) $\{Y_n = Y, n = 0,1,2,\cdots\}$,其中$Y$是随机变量,$E(Y^2) < \infty$.

对(1) 而言，由大数定律知，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i \to m \quad (a.s.)$$

但在(2) 中，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i = Y$

即经过对时间的平均后，随机性没有任何改变。

于是自然产生这样的问题：在何种条件下，平稳过程对时间的平均值可以等于过程的均值？这一问题称为平稳过程的遍历性问题。这是平稳过程研究中的一个重要课题。

对于平稳过程$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$重要的是确定它的均值m和它的协方差函数$\gamma(\tau)$(或相关函数$R(\tau)$)。由于$E(X_n)=m$，为估计m，就必须对随机过程$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$作大量观察.以$X_j(t)$记第j次观察中时刻t的值$j=0,1,2,\cdots,n$.由大数定律知，可以用$\hat{m}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k(t)$ 来估计m。同样，为了估计协方差

上页 下页 返回

$\gamma(\tau)$,也可以用 $\hat{\gamma}(\tau)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k(t+\tau)-\hat{m})(X_k(t)-\hat{m})$

来估计。然而对随机过程作多次观察一般来说很难做到。容易做到的是作一次观察，获得一条样本路径,我们希望由这一次观察来估计m和$\gamma(\tau)$。对于一般的随机过程这是不可能的,但是对于平稳过程,只要加上一些条件，就可以从一次观察中得到m和$\gamma(\tau)$的较好的估计，这就是遍历性定理。

定义1: 设$\{X(t), \ -\infty < t < \infty\}$为一平稳过程，若

$$\overline{X} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt = m$$

或当参数空间$T = Z$时，

$$\overline{X} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} X(k) = m$$

则称$\{X(t), \ -\infty < t < \infty\}$的均值有遍历性。这里 的极限是指均方意义下的极 限，即

$$\lim_{T\to\infty} E\left[\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt - m\right|^2\right] = 0$$

定义2: 设$\{X(t), \ -\infty < t < \infty\}$为一平稳过程，若

$$\overline{\gamma(\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t)-m)(X(t+\tau)-m)dt = \gamma(\tau)$$

或当参数空间$T = Z$时，

$$\overline{\gamma(\tau)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}(X(k)-m)(X(k+\tau)-m) = \gamma(\tau)$$

则称$\{X(t), \ -\infty < t < \infty\}$的协方差有遍历性. 这里的极限是指均方意义下的极限.

若随机过程(或随机序列)的均值和协方差函数都具有遍历性，则称此随机过程有遍历性。

上页 下页 返回

上述的定义中，如果t只取非负实数(非负整数)时,相应的积分和求和就限制在[0,+∞)上.例如，相应的

$$\overline{X} = \underset{T\to\infty}{Lim}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt = m$$

或

$$\overline{X} = \underset{N\to\infty}{Lim}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} X(k) = m$$

例2.12:

设$X(t) = X, t \in (-\infty,\infty)$, X是随机变量,$P(X = \pm 1) = \frac{1}{2}$,

试判定$X(t)$的均值是否具有遍历性.

上页 下页 返回

例2.13:

正弦波$X(t)=A\cos(\omega t+\theta)\quad -\infty<t<\infty$,其中$\omega$是常数

A与θ相互独立.

$$A\sim f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\theta\sim U[0,2\pi]$,判定该随机过程是否具有遍历性.

上页 下页 返回

定理2.2:　(均值遍历性定理)

(1)$\{X_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是平稳序列，其均值为$m$，协方差$\gamma(\tau)$,则$\{X_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$均值具有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}X(\tau)=0$$

(2)设$\{X(t),\ -\infty<t<\infty\}$是平稳过程，则它的均值具有遍历性的充要条件 是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\gamma(\tau)d\tau=0$$

推论2.1: 若$\int_{-\infty}^{+\infty}|\gamma(\tau)|d\tau<\infty$,则均值遍历性定理成立。

证明：由于当$0\le\tau\le 2T$时，$\left|\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\gamma(\tau)\right|\le|\gamma(\tau)|$

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\gamma(\tau)d\tau\right|\le\frac{1}{T}\int_0^{2T}|\gamma(\tau)|d\tau$$

$$\le\frac{1}{T}\int_0^{\infty}|\gamma(\tau)|d\tau\to 0$$

推论2.2: 对于平稳序列而言，若$\gamma(\tau)\to 0(\tau\to\infty)$,

则均值遍历性定理成立。

上页 下页 返回

定理2.2: (协方差函数遍历性定理)

设$\{X(t), -\infty < t < \infty\}$是平稳过程,其均值函数为0,则协方差函数具有遍历 性的充分必要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau_1}{2T})(B(\tau_1)-\gamma^2(\tau))d\tau_1 = 0$$

其中

$$B(\tau_1) = E[X(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t)].$$

(定理2.1及定理2.2一般了解.)

作业1:

设$X(t) = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t, t \geq 0, \alpha$为常数，$A, B$为相互独立同分布于$N(0,\sigma^2)$,判别$X(t)$是否为宽平稳过程。

作业2: 书第二章 习题2.6.

作业3:

设$X(t) = A\cos t + B\sin t, -\infty \leq t \leq \infty$为常数，$A, B$是均值为零的不相关的随机变量，且$E(A^2) = E(B^2)$,试证：

$X(t)$对均值具有遍历性，协方差函数不具有遍历性。

上页 下页 返回

第3章 Poisson过程

3.1 Poisson过程

*Poisson*过程是一类重要的计数过程，先给出计数过程的定义

定义3.1：随机过程$\{N(t),\ t \geq 0\}$称为计数过程，如果$N(t)$表示从0到t时刻某一特定事件A发生的次数，它具备以下两个特点：

(1) $N(t)$取值为整数；

(2) $s < t$时，$N(s) \leq N(t)$且$N(t) - N(s)$表示$(s,t]$时间内事件A发生的次数。

上页 下页 返回

计数过程有着广泛的应用,如：某商店一段时间内购物的顾客数;某段时间内电话转换台呼叫的次数;加油站一段时间内等候加油的人数等。

如果在不相交的时间区间中发生的事件个数是独立的，则称该计数过程有独立增量。即当 $t_1 < t_2 < t_3$, 有 $X(t_2) - X(t_1)$ 与 $X(t_3) - X(t_2)$ 是独立的。

若在任一时间区间中的事件个数的分布只依赖于时间区间的长度,则计数过程有平稳增量。即对一切 $t_1 < t_2$ 及 $s > 0$，在 $(t_1 + s, t_2 + s]$ 中事件个数 $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ 与区间 $(t_1, t_2]$ 中事件的个数 $N(t_2) - N(t_1)$ 有相同的分布。

上页 下页 返回

Poission过程是计数过程，而且是一类最重要、应用广泛的计数过程，它最早于1837年由法国数学家Poission引入。

独立增量和平稳增量是某些级数过程的主要性质.

*Poisson*过程是具有独立增量和平稳增量的计数过程.

上页 下页 返回

定义3. 2：计数过程$\{N(t),\ t \geq 0\}$称为参数为$\lambda(\lambda > 0)$ $Poisson$过程，如果

(1) $N(0) = 0$;

(2) 过程具有独立增量；

(3) 对任意的$s,t \geq 0$,

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

注：由条件(3)知，$Poisson$过程具有平稳增量，且

$$E[N(t)] = \lambda t$$

显然，可以认为λ是单位时间内发生事件 的平均次数，称λ为$Poisson$过程的强度或速度或生 起率(发生率)。

例3.1：设顾客到达商店依次3人$/h$的平均速度到达，且服从*Poisson*分布，已知商店上午$9:00$开门,试求

(1)从$9:00$到$10:00$这一小时内最多有5名顾客的概率?

(2)到$9:30$时仅到一位顾客，而到$11:30$时总计已达到5位顾客的概率?

解：见板书。

注：从定义3.2知,为了确定一个任意的计数过程实际上是不是*Poisson*过程,则必须验证是否满足(1)－(3),条件(1)说明计数过程从0开始,条件(2)通常可以从我们对过程的实际情况去直接验证.然而条件(3)一般完全不清楚如何去判定,为此给出如下*Poisson*过程的等价定义.

上页 下页 返回

定义3.2’：一计数过程 $\{N(t), t \ge 0\}$ 称为参数为 λ 的 *Poisson* 过程，若满足:

(1)' $N(0) = 0$;

(2)' 是独立增量及平稳增量过程，即任取

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \in N$$

$N(t_1) - N(0), N(t_2) - N(t_1), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ 相互独立;

且 $\forall s, t > 0, n \ge 0$, $P\{N(s+t) - N(t) = n\} = P\{N(t) = n\}$

(3)' 对任意 $t > 0$, 和充分小的 $h > 0$, 有

$$P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$$

(4)' 对任意 $t > 0$, 和充分小的 $h > 0$, 有

$$P\{N(t+h) - N(t) \ge 2\} = o(h)$$

定义3.2’的解释：为什么实际中有那么多的现象可以用*Poisson*过程来反映呢？其根据是稀有事件原理，在概率论中我们已经学到：

*Bernoulli*试验中，每次试验成功的概率很小，而实验的次数很多时，二项分布会逼近*Poisson*分布。这一现象也体现在随机过程中。

上页 下页 返回

首先，将$(0,t]$划分为n个相等的时间小区间，则由条件(4)'可知，当$n \to \infty$时，在每个小区间内事件发生2次或2次以上的概率 $\to 0$.事件发生一次的概

率$p \approx \lambda \cdot \frac{t}{n} (= \lambda h)$,显然$p$很小,这恰好是1次

*Bernoulli*试验.

其中发生1次为成功,不发生的为失败,再由(2)'给出的平稳增量,$N(t)$就相当于n次独立*Bernoulli*试验中试验成功的总次数。由*Poisson*分布的二项逼近可知，$N(t)$将服从参数为λt的*Poisson*分布。

定理3.1：定义3.2与定义3.2'是等价的。

证明：定义3.2'$\Rightarrow$ 定义3.2

由增量平稳性，记：

$$P_n(t) = P\{N(t)=n\} = P\{N(s+t)-N(s)=n\}$$

(I) $n=0$ 情形：因为

$$\{N(t+h)=0\} = \{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\}, h>0$$

我们有：

$$P_0(t+h) = P\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\} =$$

$$= P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\} = P_0(t)P_0(h)$$

另一方面

$$P_0(h) = P\{N(t+h)-N(t)=0\} = 1-(\lambda h+o(h))$$

代入上式，我们有:

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\left(\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}\right)$$

令 $h\to 0$ 我们有:

$$\begin{cases} P_0'(t)=-\lambda P_0(t) \\ P_0(0)=P\{N(0)=0\}=1 \end{cases} \Rightarrow \quad P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

(II) $n>0$ 情形：因为:

$$\{N(t+h)=n\}=\{N(t)=n, N(t+h)-N(t)=0\}$$

$$\cup\{N(t)=n-1, N(t+h)-N(t)=1\}$$

$$\cup\left[\bigcup_{l=2}^{n}\{N(t)=n-l, N(t+h)-N(t)=l\}\right]$$

上页 下页 返回

故有:

$$P_n(t+h)=P_n(t)(1-\lambda h-o(h))+P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h))+o(h)$$

化简并令 $h\to 0$ 得: $P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$

两边同乘以 $e^{\lambda t}$，移项后有:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)\\ P_n(0)=P\{N(0)=n\}=0\end{cases}$$

当 $n=1$ 时，有:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_1(t)\right]=\lambda\,,\ P_1(0)=0 \quad\Rightarrow\quad P_1(t)=(\lambda t)e^{-\lambda t}$$

由归纳法可得：

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\ ,\quad n\in N_0$$

注意： $E\{N(t)\}=\lambda t \quad \Rightarrow \quad \lambda=\dfrac{E\{N(t)\}}{t}$

因此 λ 代表单位时间内事件 A 出现的平均次数。

由归纳法可得：

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\,,\quad n\in N_0$$

注意： $E\{N(t)\}=\lambda t \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{E\{N(t)\}}{t}$

因此 λ 代表单位时间内事件 A 出现的平均次数。

定义3.2 $\Rightarrow$ 定义3.2'

$$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=P\{N(h)-N(0)=1\}$$

$$=e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!}=\lambda h\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!}=\lambda h(1-\lambda h+o(h))$$

$$=\lambda h+o(h)$$ ——(3)'成立。

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=P\{N(h)-N(0)\geq 2\}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^n}{n!}=e^{-\lambda h}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda h)^n}{n!}$$

$$=e^{-\lambda h}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda h)^n}{n!}-1-\lambda h]=e^{-\lambda h}[e^{\lambda h}-1-\lambda h]$$

$$=1-e^{-\lambda h}-\lambda he^{-\lambda h}=o(h)$$ ——(4)'成立。

上页 下页 返回

例3.2: 设$\{N(t),\ t\geq 0\}$服从强度为λ的$Poisson$过程,求

(1) $P\{N(5)=4\}$;

(2) $P\{N(5)=4, N(7.5)=6, N(12)=9\}$;

(3) $P\{N(2)=9 \mid N(5)=4\}$.

例3.3： 事件A的发生形成强度为λ的Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$，如果每次事件发生时以概率P能够被记录下来，并以$M(t)$表示t时刻记录下来的事件总数，则$\{M(t),t\geq 0\}$是一个强度为λP的Poisson过程。

例3. 4: 某商场为调查顾客到来的客源情况,考察了男女顾客来商场的人数.假设男女顾客到达商场的人数分别是独立服从每分钟1人与每分钟2人的*Poisson*过程。

(1) 到达商场顾客的总人数应该服从什么分布?

(2) 已知t时刻已有50人到达的条件下,问其中有30位是女性顾客的概率有多大? 平均有多少女性顾客?

作业1：

设通过某十字路口的车流可以看做*Poisson*过程，如果1分钟内没有车辆通过的概率为0.2.

(1) 求2分钟内有多于1辆车通过的概率。

(2) 在5分钟内平均通过的车辆数。

(3) 在5分钟内平均通过的车辆数方差。

(4) 在5分钟内至少有一辆车通过的概率。

作业2：书第三章习题3.5, 3.6, 3.10

3.2 Poisson过程相联系的若干分布

$Poisson$过程$\{N(t),t\geq 0\}$的一条样本路径一般是跳跃度为1的阶梯型函数。

$T_n: n=1,2,\cdots$是n次事件发生的时刻，也称为第n次事件的等待时间，规定：$T_0=0.$

$X_n: n=1,2,\cdots$是n次与$n-1$次事件发生的时间间隔，序列$\{X_n,n\geq 1\}$也称为时间间隔序列.

显然 $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \qquad X_n=T_n-T_{n-1}$

复习：1. 指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

2. 无记忆性

若随机变量满足 $P(X>s+t\,|\,X>t)=P\{X>s\}$

则称随机变量X是无记忆性的。(指数分布无记忆性.)

如果将X看做某仪器的寿命，则X的无记忆性表示为：

在仪器已工作了t小时的条件下，它至少工作$s+t$小时的概率与它原来至少工作s小时的概率是相同的。

结论：若$X \sim E(\lambda)$, 则对任意的 $s>0, t>0$, 恒有：

$$P(X>s+t \mid X>t)=P\{X>s\}$$

一、X_n和T_n的分布

定理3. 2:

X_n, $n=1,2,\cdots$服从参数为λ的指数分布,且相互独立.

注：定理3.2的结果应该是在预料之中的,因*Poisson*过程有平稳独立增量,因此过程在任何时刻都"重新开始",即从任何时刻起过程独立于先前已发生的一切(由独立增量),且有与过程完全一样的分布(由平稳增量).换言之,过程"无记忆性",与指数分布的"无记忆性"相对应.

定理3.2给出了*Poisson*过程的又一种定义方法：

定义3. 3： 如果每次事件发生的时 间间隔$X_1, X_2, \cdots$相互独立且服从同一参 数λ的指数分布，这该计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$是一个强度为λ的*Poisson*过程.

注：如果任意相继出现的两 个质点的点间间距是相互独立，且服从同一 参数为λ的指数分布，则质点流构成强度为λ的*Poisson*过程.

定理3.2告诉我们,要确定一个计数过程是 不是*Poisson*过程,只要用统计方法检验点 间间距是否独立,且服从同一指数分布。

例3.5：（见书例3.4）

设从早上8:00开始有无穷多个人排队 等候服务,只有一名服务员,且每个人接受服务的时 间是独立的并服从均值为20min的指数分布，则到中午12 : 00为止平均有多少人已经 离去，已有9个人接受服务的概率是多少?

上页 下页 返回

例3.6:

甲、乙两路公共汽车都通过某一站,两路汽车的达到分别服从10分钟1辆(甲), 15分钟一辆(乙)的*Poisson*分布.假定车总不会满员，试问可乘坐甲或乙两路公共汽车的乘客在此车站所需要等待时间的概率分布及其期望。

定理3.3：T_n，$n=1,2,\cdots$服从参数为n和λ的Γ的分布.

证明：见板书。

上页 下页 返回

二、事件发生时刻的条件分布

讨论在给定$N(t)=n$的条件下，$T_1,T_2,\cdots,T_n$的条件分布相关性质及其应用。

引理：假设$\{N(t),t\geq 0\}$是*Poisson*过程，则$\forall 0<s\leq t$，

有
$$P(T_1\leq s\mid N(t)=1)=\frac{s}{t}$$

即在已知$[0,t]$内A只发生一次的前提下，A发生的时刻在$[0,t]$上是均匀分布．因为*Poisson*过程具有平稳独立增量，事件在$[0,1]$的任何相等长度的子区间内发生的概率是等可能的，即它的条件分布是$[0,t]$上的均匀分布．

自然我们要问:

(1) 这个性质能否推广到$N(t)=n, n\geq 1$的情况?

(2) 这个性质是否是$Poisson$过程特有的?本定理的逆命题是否成立?首先讨论顺序统计量的性质:

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$是n个随机变量,如果$Y_{(k)}$是$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$中第k个最小值,$k=0,1,\cdots,n$,则称$Y_{(1)}, Y_{(2)}, \cdots, Y_{(n)}$是对应于$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$的顺序统计量。若$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$是独立同分布的连续型随机变量且具有概率密度$f(y_i)$,则顺序统计量$Y_{(1)}, Y_{(2)}, \cdots, Y_{(n)}$的联合密度为:

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = n!\prod_{i=1}^{n} f(y_i) \quad (y_1 < y_2 < \cdots, < y_n)$$

上页 下页 返回

原因：

(1) $(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \cdots, Y_{(n)})$ 将等于$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，而$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$等于$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$的$n!$个排列中的任一个；

(2)当$(y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_n})$是$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$的一个排列时，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$等于$(y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_n})$的概率密度

$$f(y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_n}) = f(y_{i_1}) f(y_{i_2}) \cdots f(y_{i_n}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i)$$

注： 若$Y_i, i = 1,2,\cdots n$都在$(0,t)$上独立同均匀分布，(即$f(y_i) = \frac{1}{t}$) 则其顺序统计量$(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \cdots, Y_{(n)})$的联合密度函数是 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \frac{n!}{t^n}$

$$(0 < y_1 < y_2 < \cdots, < y_n < t)$$

上页 下页 返回

定理3.4:

设$\{N(t),t\geq 0\}$为$Poisson$过程,则在已知$N(t)=n$的条件下，事件发生的n个时刻$T_1,T_2,\cdots,T_n$的联合分布密度是:

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{n!}{t^n}\quad(0<t_1<t_2<\cdots,<t_n<t)$$

注:上式恰好是$[0,t]$区间上服从均匀分布的n个相互独立的随机变量$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$的顺序统计量$Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(n)}$的联合分布。

直观上理解:

在已知$[0,t]$内发生了n次事件的前提下，各次事件发生的时刻$T_1,T_2,\cdots,T_n$(不排序)可看做相互独立的随机变量，且服从$[0,t]$上的均匀分布。

例3.7：（见书例3.5）

乘客按照强度为λ的$Poisson$过程来到某火车站，火车在时刻t启程，计算在$(0,t]$内达到的乘客等待时间的总和的期望值，即要求$E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)]$，其中$T_i$是第$i$个乘客来到的时刻。

上页 下页 返回

例3.8：（见书例3.6）

考虑例3.3中每次事件发生时被记录到的概率随时间发生变化的情况，设事件A在s时刻发生被记录到的概率$P(s)$，若以$M(t)$表示t时刻被记录的事件数，那么它还是*Poisson*过程吗？试给出$M(t)$的分布。

上页 下页 返回

3.3 Poisson过程的推广

一、非齐次Poisson过程

当*Poisson*过程的强度λ不再是常数,而与时间t有关系时,*Poisson*过程被推广为非齐次*Poisson*过程.一般来说,非齐次*Poisson*过程是不具备平稳增量的(例如书例3.6).在实际中,非齐次*Poisson*过程也是比较常用的.例如在考虑设备的故障率时,由于设备使用年限的变化,出故障的可能性会随之变化;放射性物质的衰变速度,会因各种外部条件的变化而随之变化;昆虫产卵的平均数量随着年龄和季节而变化等.在这样的情况下,再用齐次*Poisson*过程来描述就不合适了,于是改用非齐次*Poisson*过程来处理。

定义3. 4: 计数过程$\{N(t),\ t\geq 0\}$称为参数为$\lambda(t), t\geq 0$的非齐次$Poisson$过程，若满足:

(1) $N(0)=0$;

(2) 过程有独立增量;

(3) 对任意$t>0$,和充分小的$h>0$,有

$$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h)$$

(4) 对任意$t>0$,和充分小的$h>0$,有

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$$

在非齐次$poisson$过程中，均值 $m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$.

非齐次$Poisson$过程有如下等价定义:

定义3.5：计数过程$\{N(t),\ t\geq 0\}$称为参数为$\lambda(t), t\geq 0$的非齐次$Poisson$过程，若满足：

(1) $N(0)=0$;

(2) 过程具有独立增量；

(3) 对任意实数$t\geq 0, s\geq 0, N(t+s)-N(t)$具有参数为

$$m(t+s)-m(t)=\int_t^{t+s}\lambda(u)du \text{的} Poisson \text{分布。}$$

可证：

$$P(N(t+s)-N(t)=n)$$

$$=\exp\{-(m(t+s)-m(t))\}\frac{[m(t+s)-m(t)]^n}{n!}$$

注1:我们称m(t)为非齐次poisson过程的均值或强度。

注2:定义3.4与定义3.5是等价的。

上页 下页 返回

定理3.5： 设$\{N(t),\ t\geq 0\}$是一个强度为$\lambda(t), t\geq 0$的非齐次$Poisson$过程，对任意实数$t\geq 0$，令$N^*(t)=N(m^{-1}(t))$，则$\{N^*(t)\}$是一个强度为1的齐次$Poisson$过程。

注3：用此定理可以简化非齐次Poisson过程的问题到齐次Poisson过程中进行讨论。另一方面也可以进行反方向的操作，即从一个参数为λ的Poisson构造一个强度函数为$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程。

定理3.5'：设$\{M(u), u\geq 0\}$是齐次$Poisson$过程，且$\lambda=1$。若强度函数$\lambda(s), s\geq 0$，令$m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$，$N(t)=M(m(t))$，则$\{N(t)\}$是具有强度为$\lambda(s)$的非齐次$Poisson$过程。（一般了解）

例3.9：（见书例3.7）

设某设备的使用期限为10年，在前5年内它平均2.5年需要维修一次，后5年平均2年需要维修一次。试求它在使用期内 维修过一次的概率。

二、复合Poisson过程

定义3.6：称$\{X(t),t\ge 0\}$为复合$Poisson$过程,如果对于$t\ge 0$, $X(t)$可以表示为： $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$

其中$\{N(t),t\ge 0\}$是一个$Poisson$过程，$Y_i, i=1,2\cdots$是一族独立同分布的随 机变量,并且与$\{N(t),t\ge 0\}$也是独立的。

容易看出：复合$Poisson$过程不一定是计数过程，但当$Y_i\equiv c, i=1,2,\cdots c$为常数时，可化为$Poisson$过程。

物理意义：如$\{N(t),t\ge 0\}$表示粒子流, $N(t)$表示$[0,t]$内到达的粒子数Y_i表示第i个粒子 的能量,则$X(t)$表示$[0,t]$内到达的粒子的总能量。

上页 下页 返回

例3.10:（见书例3.8）

保险公司接到的索赔次数服从一个*Poisson*过程$\{N(t)\}$，每次要求赔付的金额Y_i都相互独立,且有同分布F，每次的索赔数额与它发生的时刻无关，则$[0,t]$时间内保险公司需要赔付的总金额$\{X(t)\}$就是一个复合*Poisson*过程，其中

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$$

例3.11：（见书例3.9　顾客成批到达的排队系统）

设顾客到达某系统的时间$S_1, S_2, \cdots$形成一强度为λ的$Poisson$过程，在每个时刻$S_n, n = 1,2\cdots$可以同时有多名顾客到达．Y_n表示在时刻S_n到达的顾客数，假定$Y_n, n = 1,2\cdots$相互独立，并且与$\{S_n\}$也独立，则在$[0, t]$时间内到达服务系统的顾客总人数也可用以复合$Poisson$过程来描述。

上页　下页　返回

定理3.6：设$\{X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t\geq 0\}$是一复合Poisson过程，Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$的强度为$\lambda$，则

(1) $X(t)$有独立增量；

(2) 若$E(Y_i^2)<+\infty$，则

$$E[X(t)]=\lambda t E(Y_1),\ Var[X(t)]=\lambda t E(Y_1^2).$$

例3. 12:（见书例3. 10）

在保险中的索赔模型中,设保险公司接到的索赔要求是强度为每月2次的*Poisson*过程，每次赔付服从均值为10000元的正态分布，则一年中保险公司平均的赔付额是多少?

上页 下页 返回

作业1:

设$\{N(t),t\geq 0\}$是一强度函数为$\lambda(t)=e^t$的非齐次$Poisson$过程，若$\{N^*(t),t\geq 0\}$是一强度为1的齐次$Poisson$过程，求$N^*(t)$.

作业2:

一份杂志通过零售来销 售。其销售量为每天平 均为6份的$Poisson$过程。零售商每售出一 份，可得1元的手续费，求零售商一年 内所得总手续费的期望 值。

参考　　**例**3.12:**（见书例**3.10**)**

作业3:　　见书习题3.12

上页　下页　返回

第5章 Markov过程

5.1 基本概念

1．Markov链的定义

引入：M*arkov*性 (无后效性)

即:要确定将来的状态,知道它此刻的情况就足 够了,与它以往的过程无关。即：过程"将来"的情况与"过去"的情况无关。

直观意义：在已知"现在"的条件下,"将来"与"过去"无关的性质。就是直观意义下的*Markov*性或无后效性。

具有无后效 性的随机过程称为*Markov*过程。

上页 下页 返回

定义5.1：设随机过程$\{X(t),t\in T\}$，其中$T=\{0,1,2,\cdots\}$

（或$\{X_n n=0,1,\cdots\}$，或$X(n)$），状态空间$S=\{0,1,2\cdots\}$

若对任意一时刻n，以及任意状态$i_0,i_1,\cdots,i_{n-1},i_n,j$

有

$$P(X_{n+1}=j\mid X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)$$

$$=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i_n)$$

则称$\{X_n n\geq 0\}$为一*Markov*链（或马氏链）.

上页 下页 返回

2．转移概率

定义5. 2：**称定义5.1中的条件概率**

$P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i_n)\triangleq p_{ij}(n)$ 为*Markov*链$\{X_n n=0,1,\cdots\}$

的一步转移概率，简称为转移概率.

定义5. 3：当$P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i_n)$只与i,j有关，而与n

无关时，即 $P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i_n)\triangleq p_{ij}(n)\triangleq p_{ij}$

称*Markov*链为齐次的(时齐的).

否则，称为非齐次的(非时齐的)。

上页 下页 返回

注：有定义5.1知

$$P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)=$$

$$P(X_n=i_n\mid X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})\cdot$$

$$P(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})$$

$$=P(X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1})\cdot$$

$$P(X_{n-1}=i_{n-1}\mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-2}=i_{n-2})\cdot P(X_0=i_0,\cdots,X_{n-2}=i_{n-2})$$

$$=P(X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1})\cdot P(X_{n-1}=i_{n-1}\mid X_{n-2}=i_{n-2})$$

$$\cdots P(X_1=i_1\mid X_0=i_0)P(X_0=i_0)$$

$$=P_{i_0}\cdot P_{i_1i_2}\cdots\cdot P_{i_{n-1}i_n}$$

上页 下页 返回

可见,一旦*Markov*链的初始分布$P(X_0 = i_0)$给定,其统计特性完全由条件概率$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n) \triangleq p_{ij}$来决定,如何确定这个条件概率,是*Markov*链理论和应用中的重要问题之一。

转移概率矩阵

$$P = \left(P_{ij}\right) = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

简称为转移矩阵。

转移矩阵的性质：

(1) $P_{ij} \geq 0, i, j \in S$

(2) $\sum_j P_{ij} = 1, \ \forall i \in S$

定义5.4： 称矩阵$A = (a_{ij})_{S \times S}$为随机矩阵，

若$a_{ij} \geq 0 (i, j \in S)$ 且 $\forall i \in S, \sum_j a_{ij} = 1.$

显然 $P = \left(P_{ij}\right)$ 是一随机矩阵。

2．*Markov*链的例子

例5.1：带有一个吸收壁的随机游动：

特点:当$X(n)=0$时，$X(n+1)$就停留在零状态。此时$\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$是一齐次马氏链，其状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，一步转移概率为：

$$\begin{cases} p_{i\,i+1}=p & (i\ge 1, i\in S) \\ p_{i\,i-1}=q & (i\ge 1, i\in S) \\ p_{i\,j}=0 & (j\ne i+1, i-1, i\ge 1, i\in S) \\ p_{0\,0}=1 & \end{cases}$$

注意；i 状态为马氏链的吸收状态的充要条件是：

$$p_{i\,i}=1$$

例5. 2：带有两个吸收壁的随机游动：

此时$\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$是一齐次马氏链,状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,a\}$, $0, a$ 为两个吸收状态,它的一步转移概率为：

$$p_{i\,i+1}=p \qquad (1\le i\le a-1)$$

$$p_{i\,i-1}=q=1-p \qquad (1\le i\le a-1)$$

$$p_{i\,j}=0 \qquad (j\ne i+1, i-1; 1\le i\le a-1)$$

$$p_{00}=1$$

$$p_{aa}=1$$

$$p_{0\,j}=0 \qquad (j\ne 0)$$

$$p_{a\,j}=0 \qquad (j\ne a)$$

它的一步转移概率矩阵为:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(a+1)\times(a+1)}$$

例5.3：带有一个反射壁的随机游动：

特点：一旦质点进入零状态，下一步它以概率 p 向右移动一格，以概率 $q=1-p$ 停留在零状态。此时的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$ 它的一步转移概率为：

$$p_{i\,i+1}=p \qquad (i\geq 1)$$

$$p_{i\,i-1}=q=1-p \qquad (i\geq 1)$$

$$p_{i\,j}=0 \qquad (j\neq i+1,i-1;\ i\geq 1)$$

$$p_{01}=p$$

$$p_{00}=1-p=q$$

$$p_{0\,j}=0 \qquad (j\neq 0,1)$$

例5. 4:

有三个黑球和三个白球. 把这六个球任意等分给甲、乙两个袋中,并把甲袋中的白球数定义为该过程的状态,则有四个状态:0,1,2,3.现每次从甲、乙两个袋中各取一球,然后相互交换,即把从甲袋取出的球放入乙袋,把从乙袋取出的球放入甲袋,经过n次交换,过程的状态为 $X(n)$.

(1) 试问该过程是否为$Markov$过程?

(2) 计算它的一步转移概率矩阵。

上页 下页 返回

例5.5：

考虑订货问题。设某商店使用(s,S)订货策略，每天早上检查某商品的剩余量，设为x,则订购额为：

$$\begin{cases} 0, & 若x \ge s \\ S-x, & 若x < s \end{cases}$$

设订货和进货不需要时间，每天的需求量Y_n独立同分布且$P\{Y_n = j\} = a_j, j = 0,1,2\cdots$,现在我们要从上述问题中寻找一个$Markov$链。

令X_n为第n天结束时的存货量(设X_n可取负值),则

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - Y_{n+1}, & 若x \ge s \\ X_n + (S - X_n) - Y_{n+1} = S - Y_{n+1} & 若x < s \end{cases}$$

因此$\{X_n, n \geq 1\}$是$Markov$链,是写出它的转移概率.

解: (1) 当$X_n = i < s$时,

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(S - Y_{n+1} = j)$$
$$= P(Y_{n+1} = S - j) = a_{s-j}$$

(2) 当$X_n = i \geq s$时,

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_n - Y_{n+1} = j \mid X_n = i)$$
$$= P(Y_{n+1} = i - j) = a_{i-j}$$

4. n步转移概率 C-K方程

定义5.5（n步转移概率）

称 $P_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\} \quad i, j \in S, \; m \geq 0, \; n \geq 1$

为$Markov$链的n步转移概率。

即：$P_{ij}^{(n)}$指的是系统从状态i经过n步转移到状态j的概率，它对中间的$(n-1)$步转移经过的状态无要求。

称 $P^{(n)} = (P_{ij}^{(n)})$ ______n步转移矩阵

当$n=1$时，$P_{ij}^{(1)} = P_{ij}, \quad P^{(1)} = P$

规定 $P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

上页 下页 返回

$P_{ij}^{(n)}$与P_{ij}的关系如下：

定理5.1: (Chapman-Kolmogorov方程，简称C-K方程)

对一切 m, $n \geq 0$, $i, j \in S$ 有

(1) $$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

(2) $$P^{(n)} = P \cdot P^{(n-1)} = P \cdot P \cdot P^{(n-2)} = \cdots = P^n$$

例5.6：

考察掷硬币的例子.硬币的正面反面分别记为U和D，于是状态空间为$S=\{U,D\}$,为了书写方便，令$U-1$, $D-2$,假定硬币初始时为正面,我们一共投掷了50次，在第一次投掷时,硬币以概率20%翻转,求一步转移概率矩阵,并求一开始是正面,投掷4次以后还是正面的概率。

例5.7：（隐Markov模型）

我们用简单的例子引出隐*Markov*链模型。设有两枚硬币，分别记为*M*和*W*，在任何给定时刻两枚硬币或者为正面或者为反面.在任何给定时刻只有一枚硬呈现，但是有时硬币可能被替换而不改变其正反面.

硬币M和W分别具有转移概率 $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$

在任何给定时刻硬币被替换的概率为30%,替换完成时，硬币的状态不变. 这一Markov链有4个状态，分别记为1:UM; 2:DM; 3:UW; 4:DW.状态1、3表示正面U,状态2、4表示反面D转移矩阵为4X4的矩阵.我们

上页 下页 返回

可以计算转移概率,比如 $UM \to UM$,首先 $U \to U$ (无转移),而后 $M \to M$ (无转移).因此转移概率为

$$P(U \to U \mid M) \cdot P(M \to M) = 0.8 \times 0.7 = 0.56$$

其他转移概率类似可得，转移方式为

$$\begin{pmatrix} UM \to UM & UM \to DM & UM \to UW & UM \to DW \\ DM \to UM & DM \to DM & DM \to UW & DM \to DW \\ UW \to UM & UW \to DM & UW \to UW & UW \to DW \\ DW \to UM & DW \to DM & DW \to UW & DW \to DW \end{pmatrix}$$

转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0.8 \times 0.7 & 0.2 \times 0.7 & 0.8 \times 0.3 & 0.2 \times 0.3 \\ 0.2 \times 0.7 & 0.8 \times 0.7 & 0.2 \times 0.3 & 0.8 \times 0.3 \\ 0.9 \times 0.7 & 0.1 \times 0.7 & 0.9 \times 0.3 & 0.1 \times 0.3 \\ 0.05 \times 0.7 & 0.95 \times 0.7 & 0.05 \times 0.3 & 0.95 \times 0.3 \end{pmatrix}$$

例5.8:

甲、乙两个人进行比赛，设每局比赛中甲胜的概率为p,乙胜的概率为q,平局的概率为$r(p+q+r=1)$,设每局比赛后,胜者记为"+1"分,负者记为"−1"分,平局不记分.当两人中有一个人得到两分时比赛结束.以$\{X_n, n\geq 1\}$表示比赛至第n局甲获得的分数，则$\{X_n, n\geq 1\}$为一齐次Markov链。

(1) 写出状态空间;

(2) 求2步转移概率矩阵;

(3) 问在甲获得1分的情况下，在赛两局可以结束比赛的概率?

例5.9:

设$\{X_n, n\geq 0\}$是具有3个状态0,1,2的齐次马氏链，其一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

其初始分布为：$p_i(0)=p(X_0=i)=\frac{1}{3}$,

试求：(1) $P\{X_0=0, X_2=1, X_4=1\}$;

(2) $P\{X_2=1, X_4=1 \mid X_0=0\}$.

作业1：**带有两个反射壁的随机游动：**

此时$\{X(n), n=0,1,2\cdots\}$**是一齐次马氏链,状态空间为** $S=\{0,1,2,\cdots,a\}$，$0, a$ **为两个反射状态,求它的一步转移概率。**

作业2:

设任意相继两天中,雨天转晴天的概率为$\frac{1}{3}$，晴天转雨天的概率为$\frac{1}{2}$,任意一天晴或雨是互为 逆事件，以"0"表示晴天,"1"表示雨天,X_n表示第n天的状态(0或1），试写出马氏链$\{X_n, n \ge 1\}$的一步转移概率矩阵，又已知5月1日为晴天,问5月3日为晴天,5月5日为雨天的概率各等于多少?

5.3 状态的分类及性质

引入:

设系统有三种可能状态 $S=\{1,2,3\}$, "1"—良好; "2"—正常; "3"—失效。以 X_n 表示系统在时刻 n 的状态。并设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是一 $Markov$ 链, 在没有维修及更换条件下，其自然转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{17}{20} & \frac{2}{20} & \frac{1}{20} \\ 0 & \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

定义5.7 若 $\exists n \geq 0$, 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$, 称状态i可达状态j，记为 $i \rightarrow j$. 若同时 $j \rightarrow i$, 这称i与j互通，记为 $i \leftrightarrow j$。

注：若状态i不能到达状态j，则意味着

对一切$n \geq 0$,有 $P_{ij}^{(n)} = 0$.

定理5.3：互通是一种等价关系，即满足：

(1) 自反性 $i \leftrightarrow i$;

(2) 对称性 $i \leftrightarrow j$, 则 $j \leftrightarrow i$;

(3) 传递性 $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$, 则 $i \leftrightarrow k$.

注：

把任何两个相通的状态归为一类，则同一类状态都是互通的,并且任何一个状态不能同时属于两个不同的类。

定义5.8：若$Markov$链只存在一类,则称此马氏链是不可约的，否则称为可约的。

例1：设$Markov$链的状态空间$S=\{0,1,2\}$,其一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

试研究各状态的关系,并画出状态传递图.

定义5.9 (周期性)

若集合$\{n, n\geq 1, P_{ii}^{(n)}>0\}$非空，则称它的最大公约数$d=d(i)$为状态$i$的周期.若$d>1$,称状态$i$是周期的；若$d=1$，称状态$i$是非周期的。

规定: 当该集合是空集时，称i的周期为无穷大.

例2 (书5.14)

由 $P_{11}^{(n)}>0$，可能的步长为 $T=\{4,6,8,10,\cdots\}$,
最大公约数为2，所有 $d=d(1)=2$

注1: 显然$1\to 1$不能通过2步长达到，但仍称2是1的周期。

注2: 若d是周期，并非所有n都有$P_{ii}^{(nd)}>0$.
如上例中，$n=1$时，$P_{11}^{(1d)}=0$.

定理5.4：若状态i，j同属一类，则 $d(i)=d(j)$

证明：板书。

注：当两个状态的周期相同时，有时其状态之间有显著差异。

如：马氏链的状态空间$S=\{1,2,3,4\}$，

其一步转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求$d(2),d(3)$，并比较状态2,3的区别。

上页 下页 返回

定义5.10: (常返性)

对任何状态i,j,以$f_{ij}^{(n)}$记从i出发经n步后首次到达j的概率，则有 $f_{ij}^{(0)}=0.$ $n\geq 1$时，

$$f_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j,X_k\neq j,k=1,2,\cdots,n-1\mid X_0=i\}$$

令$f_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$，若$f_{jj}=1$，称状态$j$为常返状态.

若$f_{jj}<1$，称状态j为非常返状态（或瞬过状态、瞬时状态、滑过状态）.

上页 下页 返回

注1:含义：设$A_n=\{X_n=j,X_k\neq j,k=1,2,\cdots,n-1\mid X_0=i\}$,在$n$不同时$A_n$是不相交的，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$表示总有一个$n$使得过程经$n$步以后可以从$i$到达$j$,所以

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}=f_{ij}$$

注2: f_{ij}：表示从i出发,有限步到达j的概率.当i为常返状态时，以概率1从i出发，在有限步内过程将重新返回$i(f_{ii}=1)$；当i为非常返状态时$(f_{ii}<1)$,以概率$1-f_{ii}$过程不再回到i，即从i滑过去了。

注3: 对于常返状态i,定义 $\mu_i=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$ (加权平均)

则μ_i表示从i出发再返回到i所需的平均步数(时间).

上页 下页 返回

定义5.11 对于常返状态i,若$\mu_i < +\infty$,则称i为正常返态;若$\mu_i = +\infty$,则称i为零常返态;特别地,若i是正常返且是非周期的,则称之为遍历状态. 若i是遍历状态,且$f_{ii}^{(1)} = 1$,则称i是吸收状态. 显然此时$\mu_i = 1$.

例3 已知马氏链$\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$的状态空间$S = \{1,2,3,4\}$,其一步转移概率为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试确定其状态的常返性,周期性及遍历性,并确定状态1其平均转回时间μ_1.

例4 已知马氏链$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间

$S=\{1,2,3,4\}$, 其一步转移概率为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试确定其状态的常返性，周期性及遍历性.

可以证明：同一类的状态i, j,它们有相同的状态（同正常返、零常返、非常返等）

上页 下页 返回

引理5.1 （给出了$P_{ii}^{(n)}$与$f_{ii}^{(n)}$的关系）

对任意状态i，j及$1 \le n < +\infty$,有

$$P_{ii}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} P_{jj}^{(n-l)}$$

上页 下页 返回

定理5.5

(1) 状态i为常返状态当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1.\ i\text{为正常返态}\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} \neq 0 \quad (\text{或}\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} > 0) \\ 2.\ i\text{为零常返态}\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0 \end{cases}$$

(2) 状态i为非常返态时， $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{1-f_{ii}}$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$

引理5.2　若$i \leftrightarrow j$,且i为常返态，则$f_{ji}=1$

定理5.6　常返性是一个类性质:

(1) 若$i \leftrightarrow j$,则i,j同为常返状态,或非常返状态.

(2) 若$i \leftrightarrow j$,且i,j同为常返态,则i,j同为正常返或同为零常返状态.

作业1：　设马氏链的状态空间$S=\{1,2,3,4,5\}$,

其一步转移概率

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试确定其状态的常返性，

周期性及遍历性.

思考题:

赌徒输光的概率:

赌徒甲有a元，赌徒乙有b元，a,b为不小于1的正整数。两个人进行一系列的赌博。每赌一局，输者给赢者1元，没有和局，直赌到两个人中有一人输光为止. 设在每局中甲赢的概率为p,输的概率为$1-p$，求甲输光的概率。

定理5.5

(1) 状态i为常返状态当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1.\ i\text{为正常返态}\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} \neq 0\ \ (\text{或}\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} > 0) \\ 2.\ i\text{为零常返态}\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0 \end{cases}$$

(2) 状态i为非常返态时， $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{1-f_{ii}}$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$

上页 下页 返回

引理5.2 若$i \leftrightarrow j$,且i为常返态，则$f_{ji}=1$

定理5.6 常返性是一个类性质:

(1) 若$i \leftrightarrow j$,则i,j同为常返状态,或非常返状态.

(2) 若$i \leftrightarrow j$,且i,j同为常返态,则i,j同为正常返或同为零常返状态.

$$
\text{状态}\begin{cases}
\text{非常返态} \\
\text{常返态}\begin{cases}
\text{零常返态} \\
\text{正常返态}\begin{cases}
\text{有周期} \\
\text{非周期（遍历态）}
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

闭集及状态空间的分解定理

任意*Markov*链从一个常返状态出发，只能到达常返状态，因此状态空间中的常返状态的全体构成一个闭集C.

闭集:

设C为状态空间S的一个子集，若C内的任何一个状态i都不能到达C外的任何状态，则称C为一个闭集.

如果单个状态i构成的集合$\{i\}$是闭集，则称状态i为吸收态.

相关性质：

(1) C是闭集 $\Leftrightarrow$ $\forall i \in C, \forall j \notin C,$有$P_{ij}^{(n)} = 0 \quad (n \geq 0)$

(2) C是闭集 $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{j \in C} p_{ij} = 1, \forall i \in C$

(3) i为吸收态 $\Leftrightarrow$ $p_{ii} = 1$

(4) 齐次马氏链不可约 $\Leftrightarrow$ 任何两个状态均互通

(5) 所有常返态构成一个闭集

(6) 在不可约马氏链中,所有状态具有相同的状态类型.

上页 下页 返回

状态空间分解定理：

定理5.7： 任意*Markov*链的状态空间S,可唯一分解为有限个或可列个互不相交的子集$D,C_1,C_2,\cdots$之和,使得

(1) 每一个C_n是常返状态组成的不可约闭集;

(2) C_n中的状态同类,或者全是正常返态,或者全是零常返态.它们有相同的周期,且 $f_{ij}=1,\ \ i,j\in C_n$.

(3) D由全体非常返态组成.自C_n中状态出发不能到达D中的状态.

$$S=D+C_1+C_2+\cdots+C_n$$

例5　设马氏链的状态空间$S=\{1,2,3,4,5\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试讨论哪些状态是吸收态，闭集和不可约链，并将此状态空间进行分解.

上页　下页　返回

例6: 设马氏链的状态空间$S=\{0,1,2\cdots\}$,其转移概率

$$为P_{00}=\frac{1}{2},P_{i,i+1}=\frac{1}{2},P_{i0}=\frac{1}{2},\ i\in S.$$

将此状态空间进行分解，并指出其常返性和周期.

作业1：设马氏链的状态空间$S=\{1,2,3,4,5,6\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

试画出状态的链式图,并将此状态空间进行分解，并指出其常返性和周期.

上页 下页 返回

周期链分解定理：

定理5.8： 一个周期为d的不可约*Markov*链,其状态空间S可唯一分解为d个互不相交的子集之和，即

$$S=\bigcup_{r=0}^{d-1} S_r\,,\quad S_r\cap S_s=\varnothing\,,r\neq s\,,$$

且使得自S_r中任意状态出发,经1步转移必进入S_{r+1}中（其中$S_d=S_0$).

上页 下页 返回

例7：设马氏链的状态空间 $S=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试按照周期分解定理，将 S 分解为 d 个互不相交的子集 S_r 之和，并求 d.

上页 下页 返回

5.4 极限理论与不变分布

5.4.1 极限理论

对于一个系统来说，考 虑它的长期性是很有必要的.在*Markov*链应用中,人们常常关心在什么条件下,*Markov*链是一个平稳序列，即 研究

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (P_{ij}^{(n)})$$ 是否趋于稳定值P,

即转化为研究 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$是否存在?

上页 下页 返回

例8（书例5.17）(0-1传输系统）

设$Markov$链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{bmatrix},\quad 0<q<p<1$$

试讨论$\lim\limits_{n\to\infty}P^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}P^n$是否趋于稳定值$P$?

上页 下页 返回

解得：

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P^{n} = \begin{bmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{bmatrix}$$

可见，此*Markov*链的n步转移概率有一个稳定的极限(长时间转移后，概率一定). 含义深刻，此处

$$\lim_{n\to\infty} p_{i0}^{(n)} = \frac{q}{p+q} = \pi_0, \quad \lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \frac{p}{p+q} = \pi_1.$$

即，对于固定的状态j，不管链在某一时刻的状态i出发，通过长时间转移到状态j的概率都趋近于π_j.

定理5.9 设i常返且有周期为d，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$$

其中μ_i为i的平均返回时间.

当$\mu_i=\infty$时 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = 0$

推论 设i常返，则

(1) i零常返 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$

(2) i遍历 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$

证:(1)$\Rightarrow i$零常返, $\mu_i=\infty$, 由定理5.9知, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}=0$

对d的非整数倍数的n, $p_{ii}^{(n)}=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$ 从而子序列 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}=0$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i}=0，从而\mu_i=\infty,$$

i是零常返的

(2) $\Rightarrow$ i是遍历的，d=1，$\mu_i < \infty$，

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} \text{即} \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0,\ \mu_i < \infty, i\text{为正常返}$$

$\Leftarrow$ 子序列

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{1}{\mu_i}\text{，而由定理5.9}\quad \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$$

所以d=1，从而i为非周期的，i是遍历的

定理5.10 若j为非常返状态或零常返态，则$\forall i\in S$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$$

结论:

(1) (推论5.4) 设不可约的、正常返的、周期为d的$Markov$链，其状态空间为S，则对任何状态$i\to j$, $\forall i,j\in S$，有

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(nd)}=\begin{cases}\dfrac{d}{\mu_j} & \text{若}i\text{与}j\text{同属于子集}S_r\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $S=\bigcup\limits_{r=0}^{d-1} S_r$ 为定理5.8所给出.

特别地，当$d=1$时，则 $\forall i,j\in S$，有

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}$$

在*Markov*链理论中，μ_j是一个重要的量，它表示自j出发再返回到j所需的平均步数(时间)，所以$\dfrac{1}{\mu_j}$代表了自j出发每单位时间内返回到j的平均次数.

虽然我们有了μ_j的计算公式，但是，μ_j并不是很容易计算的，下节通过不变分布(平稳分布)给出了另外一种μ_j的计算方法。

(2) 有限马氏链的性质

(a) 所有非常返状态组成的集合不可能是闭集;

(b)没有零常返状态;

(c)必有正常返状态;

(d)不可约有限马氏链只有正常返态;

(e)状态空间可以分解为：$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$

其中：每个 C_n , $n = 1,2,\cdots,k$ 均是由正常返状态组成的有限不可约闭集，D 是非常返态集。

上页 下页 返回

注1： 有限状态的马氏链，不可能全是非常返状态，也不可能含有零常返状态，从而不可约的有限状态的马氏链必为正常返的。

- 证 设$S=\{0,1,\ldots,N\}$，如S全是非常返状态，则对任意 $i, j\in I$，知

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0,}$$

故 $1=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=0}^{N} p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{j=0}^{N}\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0,$ 矛盾。

如S含有零常返状态 i，则$C=\{j:i\to j\}$是有限不可约闭集

，由定理知，C中均为零常返状态，知

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall j \in C$$

由引理知 $1 = \sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)},$

所以 $1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j\in C} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0,$矛盾。

注2: 如马氏链有一个零常返状态，则必有无限多个零常返状态。

证 设i为零常返状态，则$C=\{j:i\to j\}$是不可约闭集，C中均为零常返状态，故C不能是有限集。否则

$$1=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in C}p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in C}\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0,\text{矛盾。}$$

上页 下页 返回

5.4.2 平稳分布 (不变分布)与极限分布

一、平稳分布 (不变分布)

设$\{X_n,n\geq 0\}$是齐次马尔可夫链，状态空间为I，转移概率为p_{ij}

定义5.12　称概率分布$\{\pi_j, j\in I\}$为马尔可夫链的平稳分布（不变分布），若

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij} \\ \sum_{j\in I} \pi_j = 1, \pi_j \geq 0 \end{cases}$$

即若概率分布为$\pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n\}$,转移矩阵为$P$,

有　$\pi = \pi P$　______平稳分布

上页　下页　返回

注： (1) 若初始概率分布$\{p_j, j\in I\}$是平稳分布，则

$$p_j = p_j(1) = p_j(2) = \ldots = p_j(n)$$

因为,若$P\{X_0 = j\} = P_j$是平稳分布,则X_1的分布为

$$P\{X_1 = j\} = \sum_{i\in I} P\{X_1 = j \mid X_0 = i\}\cdot P\{X_0 = i\}$$

$$= \sum_{i\in I} P_{ij}P_i = \sum_{i\in I} P_i P_{ij} = P_j$$

(2) 对平稳分布$\{\pi_j, j\in I\}$，有 $\pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}$

矩阵形式 $\pi = \pi P^{(n)}$ 其中$\pi = (\pi_j)$， $(p_{ij}^{(n)}) = P^{(n)}$

因为，对于一个平稳分 布，有

$$\pi = \pi P = \pi P^2 = \cdots = \pi P^n$$

二、遍历性的概念与极限分布

对于一般的两个状态的马氏链，由上节内容可知，

当 $0 < a, b < 1$时，$P_{ij}^{(n)}$有极限

$$\lim_{n\to\infty} P_{00}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{10}^{(n)} = \frac{b}{a+b} = \pi_0.$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{01}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = \frac{a}{a+b} = \pi_1.$$

意义　对固定的状态j，不管链在某一时刻的什么状态 i出发，通过长时间的转移到达状态 j 的概率都趋近于π_j.

上页　下页　返回

定义5.13

称*Markov*链是遍历的，如果所有 状态相通且均是周期为1的正常返状态.对于遍历的*Markov*链,极限

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad j \in I$$

称为*Markov*链的极限分布。

由定理5.11知， $\pi_j = \dfrac{1}{\mu_j}$

上页 下页 返回

或定义 设齐次马氏链的状态空间为 I,若对于所有的 $i, j \in I$,转移概率 $P_{ij}^{(n)}$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j \qquad (\text{不依赖于} i)$$

或

$$P^{(n)} = P^n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

则称此链具有**遍历性**.

若 $\sum_j \pi_j = 1$,则称 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ 为链的极限分布.

上页 下页 返回

定理5.13 对于不可约非周期的*Markov*链：

(1) 若它是遍历的， 则$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} > 0 \ (j \in I)$,

此时极限分布是平稳分 布且是唯一的平稳分布；

(2) 若状态都是瞬过的或全 为零常返的,则平稳分布不存在。

定理 不可约非周期马尔可夫链是正常返的充要条件是存在平稳分布，且此平稳分布就是极限分布

$$\left\{\frac{1}{\mu_j}, j \in I\right\}$$

推论1 有限状态的不可约非周期马尔可夫链必存在平稳分布。

推论2 若不可约马尔可夫链的所有状态是非常返或零常返，则不存在平稳分布.

推论3 若$\{\pi_j, j\in I\}$是马尔可夫链的平稳分布，则

$$\lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j$$

即：$\lim\limits_{n\to\infty} P\{X_n = j\} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{X_n = j\}$ 所取的值与初始状态的分布无关。

证：由于：$P\{X_n = j\} = \sum\limits_{i\in I} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\}$

$$= \sum_{i\in I} p_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = j\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} p_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\}$$

$$= \sum_{i\in I} \pi_j P\{X_0 = i\} = \pi_j \sum_{i\in I} P\{X_0 = i\} = \pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$$

即，经过无穷次转移后处于 j 状态的概率与初始状态无关，与初始状态的分布也无关。

例1 设马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

求马尔可夫链的平稳分布及各状态的平均返回时间。

解 因为马尔可夫链是不可约非周期有限状态的，所以平稳分布存在，设 $\pi=(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$

则 $\pi=\pi P$，$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$. 即

$$\begin{cases}\pi_1=0.7\pi_1+0.1\pi_2+0.05\pi_3\\ \pi_2=0.1\pi_1+0.8\pi_2+0.05\pi_3\\ \pi_3=0.2\pi_1+0.1\pi_2+0.9\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi_1=0.1765\\ \pi_2=0.2353\\ \pi_3=0.5882\end{cases}$$

各状态的平均返回时间为

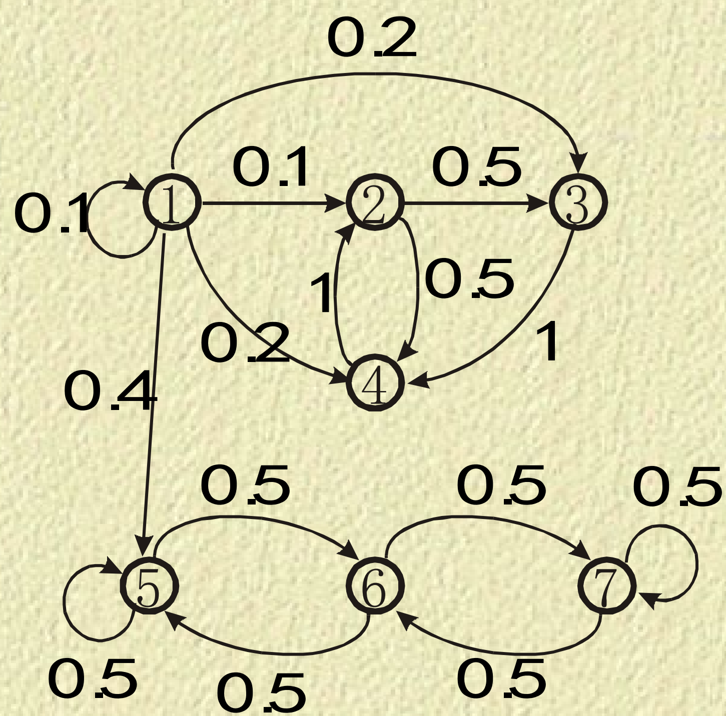
$$\mu_1=\frac{1}{\pi_1}=5.67,\ \mu_2=\frac{1}{\pi_2}=4.25,\ \mu_3=\frac{1}{\pi_3}=1.70$$

例2 设马尔可夫链转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

求每一个不可约闭集的平稳分布。

解　从状态转移图看出，状态空间可分解为两个不可约常返闭集 $C_1=\{2,3,4\}$ 和 $C_2=\{5,6,7\}$，一个非常返集 $N=\{1\}$。在常返集上求平稳分布：



在C_1上，对应的转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{cases}\pi_2=\pi_4\\ \pi_3=0.5\pi_2\\ \pi_4=0.5\pi_2+\pi_3\\ \pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi_2=0.4\\ \pi_3=0.2\\ \pi_4=0.4\end{cases}$$

C_1上的平稳分布为：{0, 0.4, 0.2, 0.4, 0, 0, 0}

同理可求得 C_2 上的平稳分布为

{0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/3}

三、(有限链)遍历性的充分条件

设齐次马氏链的状态空间为 $I=\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$,

P 是它的一步转移概率矩阵,如果存在正整数 m,

使对任意的 $a_i, a_j \in I$, 都有

$$P_{ij}^{(m)}>0, \quad i,j=1,2,\cdots,N,$$

则此链具有遍历性,且有极限分布

$\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N)$, 它是方程组 $\pi=\pi P$ 满足条件

$\pi_j>0, \sum_{j=1}^{N}\pi_j=1$ 的唯一解.

上页 下页 返回

说明

1. 求证遍历性即找一正整数 m, 使 m 步转移概率矩阵 P^m 无零元.

2. 极限分布转化为了求解方程组.

3. 在定理的条件下马氏链的极限分布是平稳分布.

四、应用举例

例3 试说明带有两个反射壁的随机游动是遍历的，并求其极限分布(平稳分布)．

解 (以×代表转移概率矩阵的正的元)

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix},$$

$$P^{(4)} = P^4 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}.$$

无零元,链是遍历的

上页 下页 返回

极限分布$\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_5)$满足方程组：$\pi = \pi \bullet P$

$$
\begin{cases}
\pi_1 = 1/3\pi_2, \\
\pi_2 = \pi_1 + 1/3\pi_2 + 3/\pi_3, \\
\pi_3 = 1/3\pi_2 + 1/3\pi_3 + 1/3\pi_4 \\
\pi_4 = 1/3\pi_3 + 1/3\pi_4 + \pi_5 \\
\pi_5 = 1/3\pi_4, \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1.
\end{cases}
\qquad
P = \begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

由前四个方程解得：$3\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 3\pi_5$.

代入最后一个方程 (归一条件), 得唯一解

$$\pi_1 = \pi_5 = 1/11, \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 3/11.$$

所以极限分布为

$$\pi = (1/11, 3/11, 3/11, 3/11, 1/11).$$

这个分布表明

经过长时间游动之后, 醉汉 Q 位于点 2 (或 3 或 4) 的概率约为 3/11, 位于点 1 (或 5) 的概率约为 1/11.

例4　设一马氏链的一步转移概率阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

试讨论它的遍历性.

解

$$P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

当 n 为奇数时， $P^{(n)} = P^{(1)} = P,$

当 n 为偶数时， $P^{(n)} = P^{(2)} = P^2.$

表明

对任意固定的 $j(=1,2,3,4)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 都不存在.

此链不具遍历性.

上页 下页 返回

五、小结

遍历性的概念

设齐次马氏链的状态空间为 I,若对于所有的 $a_i, a_j \in I$,转移概率 $P_{ij}^{(n)}$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j \qquad (\text{不依赖于} i),$$

则称此链具有遍历性.

(有限链) 遍历性的充分条件

设齐次马氏链的状态空间为 $I=\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$, P 是它的一步转移概率矩阵, 如果存在正整数 m, 使对任意的 $a_i,a_j\in I$, 都有

$$P_{ij}^{(m)}>0,\quad i,j=1,2,\cdots,N,$$

则此链具有遍历性,且有极限分布 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N)$, 它是方程组 $\pi=\pi P$ 满足条件 $\pi_j>0,\sum_{j=1}^{N}\pi_j=1$ 的唯一解.

上页 下页 返回

作业1：设$\{X_n, n\geq 1\}$的状态空间为$S=\{1,2,3\}$，

一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

试证，此马氏链是遍历的，并求出其平稳分布。

作业2：书习题5.7

第七节 连续时间马尔可夫链

定义7.1 设随机过程$\{X(t),\ t\geq 0\}$，状态空间

$I=\{0,1,2,\ldots\}$，若对任意 $0\leq t_1< t_2<\ldots<t_{n+1}$

及非负整数 $i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}$，有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2,\ldots, X(t_n)=i_n\}$$

$$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_n)=i_n\},$$

则称$\{X(t),\ t\geq 0\}$为连续时间马尔可夫链。

转移概率：在s时刻处于状态i，经过时间t后转移到状态j的概率

$$p_{ij}(s,t)=P\{X(s+t)=j|X(s)=i\}$$

定义7.2 齐次转移概率(与起始时刻 s 无关，只与时间间隔 t 有关)

$$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$$

此时有转移概率矩阵$P(t)=(p_{ij}(t))$，$i,j\in I$，$t\geq 0$.

上页 下页 返回

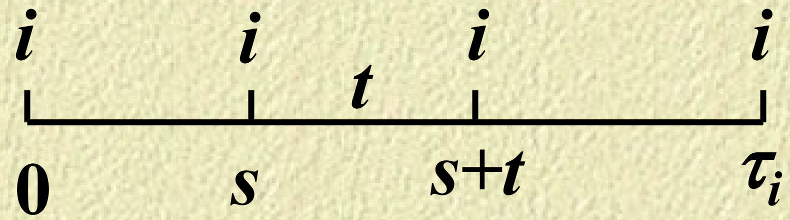
记 τ_i 为过程在状态转移之前停留在状态i的时间，

则对$s, t \geq 0$ 有

(1) $P\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$

(2) τ_i 服从指数分布

证：(1) 事实上



$$\{\tau_i > s\} \Leftrightarrow \{X(u) = i, 0 < u \leq s \mid X(0) = i\}$$

$$\{\tau_i > s+t\} \Leftrightarrow \{X(u) = i, 0 < u \leq s,$$

$$X(v) = i, s < v \leq s+t \mid X(0) = i\}$$

$$P\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\} = \{X(u)=i, 0<u\le s,$$

$$X(v)=i, s<v\le s+t \mid X(u)=i, 0\le u\le s\}$$

$$=\{X(v)=i, s<v\le s+t \mid X(u)=i, 0\le u\le s\}$$

条件概率

$$=\{X(v)=i, s<v\le s+t \mid X(s)=i\}$$

马尔可夫性

$$=\{X(u)=i, 0<u\le t \mid X(0)=i\}$$

齐次性

$$=P\{\tau_i > t\}$$

(2) 设τ_i的分布函数为$F(x)$, $(x\geq 0)$, 则生存函数

$$G(x)=1-F(x)$$

$$P\{\tau_i > t\} = P\{\tau_i > s+t \mid \tau_i > s\}$$

$$= \frac{P\{\tau_i > s+t, \tau_i > s\}}{P\{\tau_i > s\}} = \frac{P\{\tau_i > s+t\}}{P\{\tau_i > s\}}$$

$$P\{\tau_i > s+t\} = P\{\tau_i > s\} \cdot P\{\tau_i > t\}$$

$$G(s+t) = G(s)G(t)$$

由此可推出$G(x)$为指数函数，$G(x)=e^{-\lambda x}$,

则$F(x)=1-G(x)=1-e^{-\lambda x}$为指数分布函数。

- 过程在状态转移之前处于状态i的时间τ_i服从指数分布 $F_{\tau_i}(x)=1-e^{-\lambda_i x}$

(1)当$\lambda_i=\infty$时，$F_{\tau_i}(x)=1, P\{\tau_i>x\}=1-F_{\tau_i}(x)=0,$

状态i的停留时间τ_i超过x的概率为0，则称状态i为瞬时状态；

(2)当$\lambda_i=0$时，$F_{\tau_i}(x)=0, P\{\tau_i>x\}=1-F_{\tau_i}(x)=1,$

状态i的停留时间τ_i超过x的概率为1，则称状态i为吸收状态。

定理7.1 齐次马尔可夫过程的转移概率具有下列性质：

(1) $p_{ij}(t)\geq 0$;

(2) $\sum\limits_{j\in I} p_{ij}(t)=1$;

(3) $p_{ij}(t+s)=\sum\limits_{k\in I} p_{ik}(t)p_{kj}(s)$

证 由概率的定义，(1)(2)显然成立，下证(3)

上页 下页 返回

$$p_{ij}(t+s)=P\{X(t+s)=j\mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in I}P\{X(t+s)=j,X(t)=k\mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in I}P\{X(t+s)=j\mid X(t)=k,X(0)=i\}$$

$$\cdot P\{X(t)=k\mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in I}P\{X(t+s)=j\mid X(t)=k\}P\{X(t)=k\mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in I}p_{kj}(s)p_{ik}(t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)p_{kj}(s)$$

- **注:**

$$\text{由}P_{ii}^{(0)}=1, P_{ij}^{(0)}=0(i\neq j)\text{知}$$

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

此为转移概率的正则性条件。

- 例1 证明泊松过程$\{X(t),t\geq 0\}$为连续时间齐次马尔可夫链。

证 先证泊松过程的马尔可夫性。

泊松过程是独立增量过程，且$X(0)=0$，对任意$0<t_1<t_2<\dots<t_n<t_{n+1}$有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\}$$

$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\mid X(t_1)-X(0)=i_1,$$

$$X(t_2)-X(t_1)=i_2-i_1,\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})=i_n-i_{n-1}\}$$

$$=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\}$$

上页 下页 返回

另一方面

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_n)=i_n\}\\
&=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\mid X(t_n)-X(0)=i_n\}\\
&=P\{X(t_{n+1})-X(t_n)=i_{n+1}-i_n\}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\}\\
&=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_n)=i_n\}
\end{aligned}
$$

即泊松过程是一个连续时间马尔可夫链

再证齐次性。当$j \geq i$时，

$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}=P\{X(s+t)-X(s)=j-i\}$$

$$=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

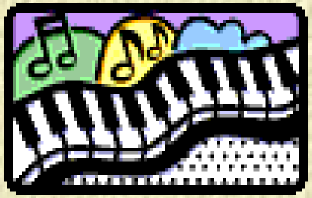
当$j<i$时,因增量只取非负整数值,故 $p_{ij}(s,t)=0$，所以

$$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)=\begin{cases} e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i \\ 0 \quad , & j<i \end{cases}$$

转移概率与s无关，泊松过程具有齐次性。

上页 下页 返回

第六节　马氏链模型



6.1 基本应用实例

6.2 健康与疾病

6.3 钢琴销售的存储策略

上页 下页 返回

马氏链模型

描述一类重要的**随机动态**系统（过程）的模型

- 系统在每个时期所处的状态是随机的
- 从一时期到下时期的状态按一定概率转移
- 下时期状态只取决于本时期状态和转移概率

  已知现在，将来与过去无关（无后效性）

马氏链 (Markov Chain)

——时间、状态均为离散的随机转移过程

6.1 基本应用实例

例1 **某计算机房的一台计算机经常出故障,研究者每隔15分钟观察一次计算机运行状态,收集了24小时的数据 (共作97次观察) . 用1表示正常状态, 用0表示不正常状态, 所得的数据序列如下:试求一步转移概率矩阵。**

1110010011111110011110111111001111111110001100

1110110110101111011101111011111100110111111000

分析

设 X_n 为第 n $(n=1,2,\cdots,97)$ 个时段的计算机状态,

状态空间: $I=\{0, 1\}$.

96 次状态转移的情况：$0 \to 0$，8次；

$0 \to 1$，18次；$1 \to 0$，18次；$1 \to 1$，52次.

因此，一步转移概率可用频率近似地表示为：

$$p_{00} = P\{X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0\} \approx \frac{8}{8+18} = \frac{8}{26},$$

$$p_{01} = P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0\} \approx \frac{18}{8+18} = \frac{18}{26},$$

$$p_{10} = P\{X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1\} \approx \frac{18}{18+52} = \frac{18}{70},$$

$$p_{11} = P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1\} \approx \frac{52}{18+52} = \frac{52}{70}.$$

马氏链在任意时刻$n \in T_1$的一维分布：

$$p_j(n) = P\{X_n = a_j\}, a_j \in I, j = 1,2,\cdots.$$

特点: $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(n) = 1.$

$$P\{X_n = a_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X_n = a_j \mid X_0 = a_i\} P\{X_0 = a_i\},$$

即 $p_j(n) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(0) p_{ij}(n),$

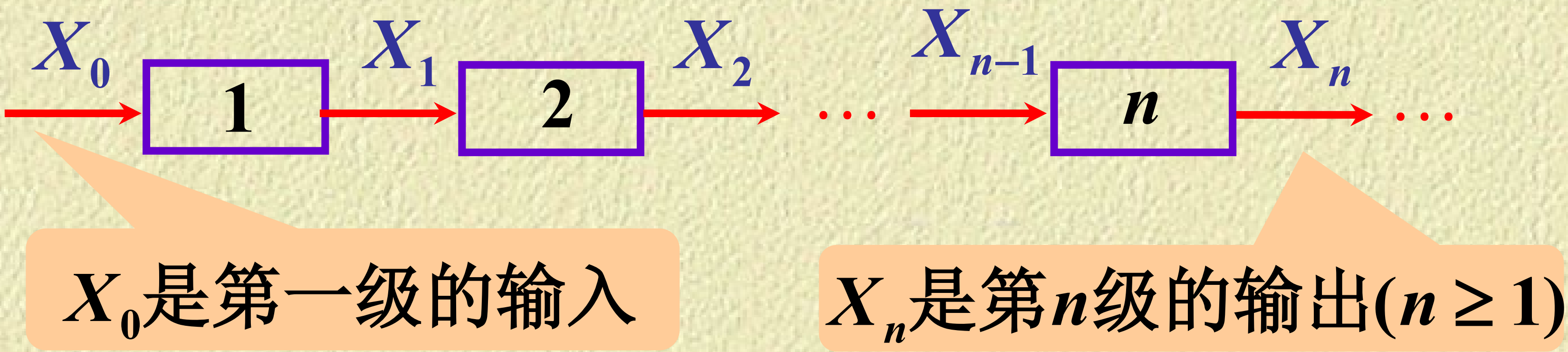
一维分布由初始分布和转移概率矩阵决定

用行向量表示为 $p(n) = p(0)P(n) = p(0)P^{(n)}$

由以上讨论知,转移概率决定了马氏链的运动的统计规律. 因此, 确定马氏链的任意n步转移概率成为马氏链理论中的重要问题之一.

例2　只传输数字0和1的串联系统 (0 – 1传输系统)

如图:



设一个单位时间传输一级,

设每一级的传真率为 p, 误码率为 q=1-p.

分析: $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$是一随机过程,

状态空间 $I = \{0, 1\}$,

且当$X_n = i, i \in I$为已知时,

X_{n+1}所处的状态分布只与$X_n = i$有关,

而与时刻 n 以前所处的状态无关.

所以它是一个马氏链, 且是齐次的.

一步转移概率

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \begin{cases} p, j = i \\ q, j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 0,1$$

一步转移概率矩阵

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \end{array}$$

上页 下页 返回

在$0-1$传输系统中,

(1) 设 $p=0.9$, 求系统二级传输后的传 真率与三级

传输后的误码率;

(2) 设初始分布 $p_1(0)=P\{X_0=1\}=\alpha$,

$p_0(0)=P\{X_0=0\}=1-\alpha$.

系统经 n 级传输后输出为 1, 问原发字符也是 1 的概率是多少?

解　先求出 n 步转移概率矩阵.

因为 $$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & p & q \\ 1 & q & p \end{array}$$ 即 $P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$,

有相异的特征值　$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = p - q$

所以可将 P 表示成对角阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{bmatrix},$$

则　$P^n = (H\Lambda H^{-1})^n = H\Lambda^n H^{-1}$

$$
= \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n, & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n, & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n \end{bmatrix} \end{array}.
$$

(1) 当$p = 0.9$, 系统二级传输后的传真 率与三级

传输后的误码率分别为:

$$P_{11}(2) = P_{00}(2) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0.9-0.1)^2 = 0.820,$$

$$P_{10}(3) = P_{01}(3) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(0.9-0.1)^3 = 0.244;$$

(2) 根据贝叶斯公式, 当系统经 n 级传输后输出为 1, 原发字符也是 1 的概率为:

$$P\{X_0=1 \mid X_n=1\}=\frac{P\{X_0=1\}P\{X_n=1 \mid X_0=1\}}{P\{X_n=1\}}$$

$$=\frac{p_1(0)P_{11}(n)}{p_0(0)P_{01}(n)+p_1(0)P_{11}(n)}$$

$$=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}.$$

上页 下页 返回

说明 对于只有两个状态的马氏链, 一步转移概率矩阵一般可表示为:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \qquad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array}, 0 < a, b < 1.$$

*n*步转移概率矩阵为

$$P(n) = P^n = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \qquad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00}(n) & P_{01}(n) \\ p_{10}(n) & P_{11}(n) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}, \ n = 1,2,\cdots.$$

6.2 健康与疾病

通过有实际背景的例子介绍马氏链的基本概念和性质

人的健康状态随着时间的推移会随机地发生转变

保险公司要对投保人未来的健康状态作出估计, 以制订保险金和理赔金的数额

例1. 人的健康状况分为健康和疾病两种状态，设对特定年龄段的人，今年健康、明年保持健康状态的概率为0.8, 而今年患病、明年转为健康状态的概率为0.7,

若某人投保时健康, 问10年后他仍处于健康状态的概率

状态与状态转移

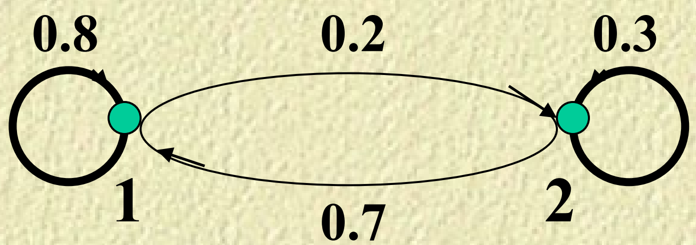
状态$X_n=\begin{cases}1, & 第n年健康\\ 2, & 第n年疾病\end{cases}$

状态概率$a_i(n)=P(X_n=i)$,
$i=1,2,\ n=0,1,\cdots$

转移概率$p_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i),\ i,j=1,2,\ n=0,1,\cdots$

$p_{11}=0.8\quad p_{12}=1-p_{11}=0.2$

$p_{21}=0.7\quad p_{22}=1-p_{21}=0.3$



X_{n+1}只取决于X_n和p_{ij}, 与X_{n-1}, …无关

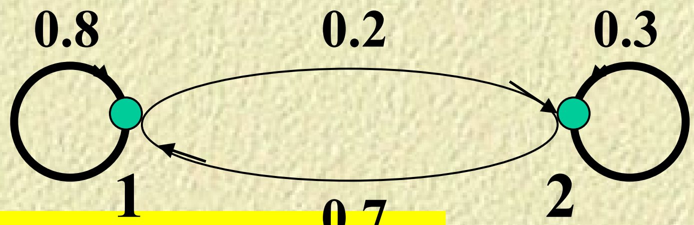
状态转移具有无后效性

$$a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}$$

$$a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}$$

上页 下页 返回

状态与状态转移



$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21} \\ a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22} \end{cases}$$

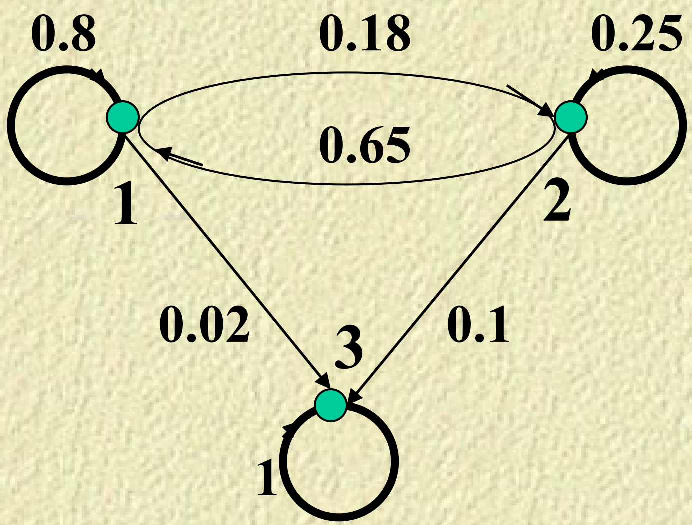
给定$a(0)$, 预测 $a(n)$, n=1,2…

	n	0	1	2	3	…	∞
设投保时健康	$a_1(n)$	1	0.8	0.78	0.778	…	7/9
	$a_2(n)$	0	0.2	0.22	0.222	…	2/9
设投保时疾病	$a_1(n)$	0	0.7	0.77	0.777	…	7/9
	$a_2(n)$	1	0.3	0.23	0.223	…	2/9

$n\to\infty$时状态概率趋于稳定值，稳定值与初始状态无关

健康与疾病

例2. 健康和疾病状态同上，$X_n=1$~ 健康, $X_n=2$~ 疾病 死亡为第3种状态，记$X_n=3$



$p_{11}=0.8$, $p_{12}=0.18$, $p_{13}=0.02$

$p_{21}=0.65$, $p_{22}=0.25$, $p_{23}=0.1$

$p_{31}=0$, $p_{32}=0$, $p_{33}=1$

$$a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}+a_3(n)p_{31}$$

$$a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}+a_3(n)p_{32}$$

$$a_3(n+1)=a_1(n)p_{13}+a_2(n)p_{23}+a_3(n)p_{33}$$

状态与状态转移

设投保时处于健康状态，预测 $a(n)$, n=1,2…

n	0	1	2	3	…	50	…	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.757	0.7285	…	0.1293	…	0
$a_2(n)$	0	0.18	0.189	0.1835	…	0.0326	…	0
$a_3(n)$	0	0.02	0.054	0.0880	…	0.8381	…	1

- 不论初始状态如何，最终都要转到状态3；
- 一旦$a_1(k)= a_2(k)=0$, $a_3(k)=1$, 则对于$n>k$, $a_1(n)=0$，$a_2(n)=0$, $a_3(n)=1$, 即从状态3不会转移到其它状态。

马氏链的基本方程

状态$X_n = 1,2,\cdots k \quad (n = 0,1,\cdots)$

状态概率$a_i(n) = P(X_n = i)$,

$i = 1,2,\cdots,k,\ n = 0,1,\cdots$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(n) = 1$$

转移概率$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

$$p_{ij} \geq 0,\ \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1,\ i = 1,2,\cdots,k$$

基本方程

$$a_i(n+1) = \sum_{j=1}^{k} a_j(n) p_{ji},\quad i = 1,2,\cdots,k$$

$a(n) = (a_1(n), a_2(n), \cdots, a_k(n))$

~状态概率向量

$P = \{p_{ij}\}_{k\times k}$ ~转移概率矩阵

（非负，行和为1）

$$a(n+1) = a(n)P$$

$$\Downarrow$$

$$a(n) = a(0)P^n$$

上页 下页 返回

马氏链的两个重要类型

$$a(n+1)=a(n)P$$

1. 正则链 ~ 从任一状态出发经有限次转移能以正概率到达另外任一状态（如例1）。

正则链 $\Leftrightarrow \exists N, P^N > 0$

正则链 $\Rightarrow \exists w, a(n) \to w (n \to \infty)$　　w ~ **稳态概率**

w满足 $wP = w$

例1. $P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 0.8w_1 + 0.7w_2 = w_1 \\ 0.2w_1 + 0.3w_2 = w_2 \end{cases} \Rightarrow 0.2w_1 = 0.7w_2$$

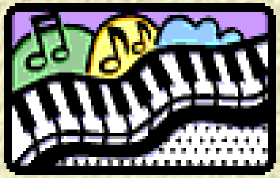
w满足 $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$

$$w_1 + w_2 = 1 \Rightarrow w = (7/9, 2/9)$$

马氏链的两个重要类型

2. **吸收链** ~ 存在吸收状态（一旦到达就不会离开的状态i, $p_{ii}=1$），且从任一非吸收状态出发经有限次转移能以正概率到达吸收状态（如例2）。

6.3 钢琴销售的存贮策略



背景与问题

钢琴销售量很小，商店的库存量不大以免积压资金

一家商店根据经验估计，平均每周的钢琴需求为1架

存贮策略：每周末检查库存量，仅当库存量为零时，才订购3架供下周销售；否则，不订购。

估计在这种策略下失去销售机会的可能性有多大，以及每周的平均销售量是多少。

问题分析

顾客的到来相互独立，需求量近似服从波松分布，其参数由需求均值为每周1架确定，由此计算需求概率

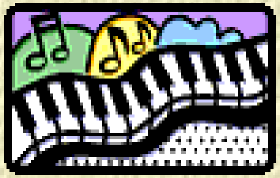
存贮策略是周末库存量为零时订购3架 →周末的库存量可能是0, 1, 2, 3，周初的库存量可能是1, 2, 3。

用马氏链描述不同需求导致的周初库存状态的变化。

动态过程中每周销售量不同，失去销售机会（需求超过库存）的概率不同。

可按稳态情况（时间充分长以后）计算失去销售机会的概率和每周的平均销售量。

模型假设



钢琴每周需求量服从波松分布，均值为每周1架

存贮策略：当周末库存量为零时，订购3架，周初到货；否则，不订购。

以每周初的库存量作为状态变量，状态转移具有无后效性。

在稳态情况下计算该存贮策略失去销售机会的概率，和每周的平均销售量。

模型建立

D_n~第n周需求量，均值为1的波松分布

$$P(D_n=k)=e^{-1}/k!\quad(k=0,1,2\cdots)$$

D_n	0	1	2	3	>3
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.019

S_n~第n周初库存量(状态变量） $S_n\in\{1,2,3\}$

状态转移规律

$$S_{n+1}=\begin{cases}S_n-D_n, & D_n<S_n\\ 3, & D_n\ge S_n\end{cases}$$

$$p_{11}=P(S_{n+1}=1|S_n=1)=P(D_n=0)=0.368$$

$$p_{12}=P(S_{n+1}=2|S_n=1)=0$$

$$p_{13}=P(S_{n+1}=3|S_n=1)=P(D_n\ge1)=0.632$$

… …

$$p_{33}=P(S_{n+1}=3|S_n=3)=P(D_n=0)+P(D_n\ge3)=0.448$$

状态转移阵

$$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.368&0&0.632\\0.368&0.368&0.264\\0.184&0.368&0.448\end{bmatrix}$$

模型建立　**状态概率** $a_i(n) = P(S_n = i), i = 1,2,3$

马氏链的基本方程　$a(n+1) = a(n)P$

$$P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix}$$

已知初始状态，可预测第 n 周初库存量 $S_n=i$ 的概率

正则链 $\Leftrightarrow \exists N, P^N > 0$　$P^2 > 0$ ⇨ **正则链**

⇩ **稳态概率分布 w 满足 $wP=w$**

$$w = (w_1, w_2, w_3) = (0.285, 0.263, 0.452)$$

$n\to\infty$，状态概率 $a(n) = (0.285, 0.263, 0.452)$

上页　下页　返回

模型求解

1. 估计在这种策略下失去销售机会的可能性

第n周失去销售机会的概率

$$P(D_n > S_n) = \sum_{i=1}^{3} P(D_n > i \mid S_n = i) P(S_n = i)$$

n充分大时

$$P(S_n = i) = w_i$$

$$= P(D > 1)w_1 + P(D > 2)w_2 + P(D > 3)w_3$$

D	0	1	2	3	>3
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.019

$$w = (0.285, 0.263, 0.452)$$

$$= 0.264 \times 0.285 + 0.080 \times 0.263 + 0.019 \times 0.452 = 0.105$$

从长期看，失去销售机会的可能性大约 10%。

上页 下页 返回

模型求解

2. 估计这种策略下每周的平均销售量

第n周平均售量

$$R_n=\sum_{i=1}^{3}[\sum_{j=1}^{i} jP(D_n=j,S_n=i)+iP(D_n>i,S_n=i)\ ]$$

需求不超过存量,销售需求　　**需求超过存量,销售存量**

$$=\sum_{i=1}^{3}[\sum_{j=1}^{i} jP(D_n=j|S_n=i)+iP(D_n>i|S_n=i)]P(S_n=i)$$

n充分大时 $P(S_n=i)=w_i$

$$=0.632\times0.285+0.896\times0.263+0.977\times0.452=0.857$$

从长期看，每周的平均销售量为 0.857(架)

思考：为什么这个数值略小于每周平均需求量1(架)？

敏感性分析

当平均需求在每周1 (架) 附近波动时，最终结果有多大变化。

设D_n服从均值为λ的波松分布

$$P(D_n = k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!,\ \ (k = 0,1,2\cdots)$$

状态转移阵

$$P = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 1 - e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda} \\ \lambda^2 e^{-\lambda}/2 & \lambda e^{-\lambda} & 1 - (\lambda + \lambda^2/2)e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

第n周(n充分大)失去销售机会的概率 $P = P(D_n > S_n)$

λ	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
P	0.073	0.089	0.105	0.122	0.139

当平均需求增长（或减少）10%时，失去销售机会的概率将增长（或减少）约12% 。

上页 下页 返回

期末复习要点：

第一章

1.上极限、下极限的定义及含义，理解事件序列的极限的表达方式。

2.熟悉常见的分布函数。

3.掌握矩母函数与特征函数的定义和性质，会求一些函数的矩母函数和特征函数。

4.条件概率与条件期望的求法及性质，

如：$EX=E[E(X|Y)]$，$E(X|X)=X$

期末复习要点:

第二章

1.理解会求随机过程的均值函数、方差函数、(自)协方差函数、 (自)相关函数、 互协方差函数、互相关函数。

2.理解(严、宽)平稳过程的定义，会判断随机过程是否为平稳过程。

3.会用定义判定平稳过程是否有遍历性(均值遍历性及协方差遍历性) 。

期末复习要点：

第三章

1.Poisson过程的定义，理解其含义。

2.会求Poisson过程的一些相关的概率。

3.理解Poisson过程时间间隔序列Xn,第n次事件发生的时刻Tn相关定理。

4.非齐次Poisson过程与齐次Poisson的关系定理，非齐次Poisson的相关概率计算。

期末复习要点：

第五章

1.理解Markov链的定义，理解其数学含义，会求相应的概率。

2.会求一步转移概率及一步转移概率矩阵。

3.会求n步转移概率，会证明C-K方程(离散时间及连续时间)。

4.会求状态的周期，会判定状态的常返性(正常反、零常返和非常返)(方法1，方法2)。

上页 下页 返回

法1：令$f_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$，若$f_{jj}=1$，称状态$j$为常返状态.

若$f_{jj}<1$，称状态j为非常返状态.

(瞬时状态、滑过状态).

法2：

(1) 状态i为常返状态当且仅当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}=\infty$

$$\Rightarrow\begin{cases} 1.\ i\text{为正常返态}\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)}\neq 0\quad (\text{或}\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)}>0) \\ 2.\ i\text{为零常返态}\ \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)}=0 \end{cases}$$

(2) 状态i为非常返态时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}=\dfrac{1}{1-f_{ii}}$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)}=0$

期末复习要点:

第五章

5.理解 $P_{ii}^{(n)}$ 与 $f_{ii}^{(n)}$ 的关系。

$$P_{ii}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} P_{jj}^{(n-l)}$$

6.会将状态进行分类 $S = D + C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

7.会判别平稳分布（不变分布）,会求平稳分布,及Markov链的遍历性.